

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月30日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340035

研究課題名（和文）大自由度系を含む力学系の大域的構造と分岐の研究

研究課題名（英文）Study of Global Structures and Bifurcations of Dynamical Systems including Systems with Large Degrees of Freedom

研究代表者

國府 寛司（KOKUBU HIROSHI）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50202057

研究成果の概要（和文）：力学系の大域的構造を位相幾何的方法と計算機援用解析を融合して解析する Conley-Morse グラフの方法を改良し、隣接パラメータ領域に対する Conley-Morse グラフ間の接続関係を求めるアルゴリズムの開発や、相空間の非一様グリッド分割で計算コストを軽減する手法を得た。Conley-Morse グラフの変化から力学系の構造の変化を捉える位相計算的分岐理論の観点から、crisis 分岐などの新しい数学的定式化を得た。Conley-Morse グラフの方法を用いて結合写像格子や結合振動子系の大域的構造の解析を行い、不安定な不変トーラスなどの不変集合とそれらの間の結合関係が捉えられることを確認した。

研究成果の概要（英文）：A great improvement of the Conley-Morse graph method, a computer-assisted method that analyzes global dynamics and bifurcations by combining a topological method and validated numerical computation has been done by developing a computer-algorithm for generating so-called clutching graphs which describe relation between Conley-Morse graphs on adjacent parameter domains. Another improvement is a method of non-uniform grid decomposition of the phase space in order to substantially decrease computational cost of the Conley-Morse graph method.

A new approach to the bifurcation theory of dynamical systems from topological-computation theory viewpoint has been proposed which captures bifurcation of dynamics from changes of the corresponding Conley-Morse graphs. From this viewpoint, we have obtained a new mathematical framework for the crisis bifurcation.

Moreover, we have studied the global dynamics of a Coupled Map Lattice system and a Coupled Oscillator system by using the Conley-Morse graph method, and have obtained the creation and bifurcations of some global dynamics such as unstable invariant tori and their connecting orbits.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	4,400,000	1,320,000	5,720,000
2010年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2011年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2012年度	2,700,000	810,000	3,510,000
年度			
総計	13,200,000	3,960,000	17,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：力学系，分岐，大域的構造，不変集合，計算機援用証明

### 1. 研究開始当初の背景

決定論的時間発展法則に従うシステムの数学的定式化である力学系は数学的な研究対象であるだけでなく、自然科学、工学から社会科学にいたる多様な非線型現象の数理モデルとして頻繁にあらわれ、その解析は現象の理解に不可欠の重要性を持つ。このような非線型現象の研究では力学系の大域的性質を理解し記述することが本質的な役割を果たしているが、力学系の大域的構造や、それが摂動によってどのように変化するかという分岐についての数学的な理解はまだ十分とは言えない。一方で、生物学や工学などの分野では実験や数値シミュレーションにより様々な興味深い振る舞いを示す解が発見されており、未開拓の豊かな数理的世界の広がりを感じられる。

力学系のカオスの振舞いの理解は3次元程度までは飛躍的に進んだが、より高次元で大自由度の力学系の基本的様相については、低次元の現象を埋め込むとか次元に無関係な一般論程度の数学的理解しか我々は得ていない。このような大自由度系を含む力学系を理解するためには、力学系の大域的構造と分岐に対する数学的研究が不可欠である。

### 2. 研究の目的

本研究計画の主な目的は、力学系の大域的ダイナミクスの理解に重要な力学系の大域的構造やその分岐についての知見を深めることと、それを応用して、具体的な非線型現象の数理モデルとして現れる力学系、特に大自由度力学系の振舞いに対するより良い理解を得ることである。

### 3. 研究の方法

力学系の大域的構造については、力学系のMorse分解を用いたConley-Morseグラフの方法と呼ばれる位相計算的方法の整備、回帰的不変集合の内部構造の解析、ヘテロクリニック構造の解明、などの研究に重点を置き、力学系の大域的構造のより深い理解を目指す。

力学系の大域的構造については、大域的構造の解析の成果をも援用しつつ、位相計算的方法による分岐の新しい捉え方の基礎理論の整備、また、それらを用いた大域的構造の検証の方法の開発に取り組む。

さらに以上の研究の成果の有用性を試し、さらなる発展のための課題を探るために、上記と並行して、様々な具体的な非線型現象の力学系モデル、特に振動子やカオスの力学系を多数相互作用させた結合系などの大自由度系の数理モデルについての解析を行う。

### 4. 研究成果

(1) ダイナミクスの大域的構造を位相幾何的方法と精度保証付き数値計算を融合して計算機を援用して解析する Conley-Morse グラフの方法は、研究代表者とその共同研究者が開発した新しい方法である。本研究では、この方法をさらに発展させ、新たな改良を行った。特に、隣接するパラメータ領域に対して得た Conley-Morse グラフの間の接続関係を示す clutching graph を計算機を用いて求めるアルゴリズムを開発したこと、また、相空間を非一様にグリッド分割することで計算コストを軽減する新しい方法を得たことが主要な改良点である。これにより、Conley-Morse グラフの方法が、より高次元のダイナミクスの解析に応用できる可能性が広がった。

(2) Conley-Morse グラフの変化を通してダイナミクスの構造の変化を捉える理論的枠組みとしての位相計算的分岐理論の研究を行い、局所的な分岐である saddle-node 分岐と、大域的な分岐である crisis 分岐について、それらを位相計算的視点から捉える新しい数学的定式化を得た。

(3) Conley-Morse グラフの方法の応用として、大自由度系の例として頻繁に取り上げられる結合写像格子 (CML) や結合振動子系に対する大域的ダイナミクスの解析を行い、Conley-Morse グラフの方法で不安定な不変トーラスなどの不変集合とそれらの間の結合関係が捉えられることを確認し、その有用性を検証した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Hiroshi Kokubu and Hiroe Oka, A topological computation approach to the interior crisis bifurcation, *Nonlinear Theory and its Applications IEICE*, Vol.4, No.1 (2013), 97-103. doi: 10.1587/nolta.4.97、査読有
- ② Zin Arai, Marcio Gameiro, Tomas Gedeon, Hiroshi Kokubu, Konstantin Mischaikow, Hiroe Oka, Graph-based topological approximation of saddle-node bifurcation in maps, *RIMS Kokyuroku Bessatsu B31* (2012), 225-241. 査読有

- ③ Justin Bush, Marcio Gameiro, Shaun Harker, Hiroshi Kokubu, Konstantin Mischaikow, Ippei Obayashi, Pawel Pilarczyk, Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics, Chaos 22 (2012), 047508. doi: 10.1063/1.4767672、査読有
- ④ Hiroshi Kokubu and Konstantin Mischaikow, A combinatorial framework for analysis of global dynamics and bifurcations, IUTAM Symposium on 50 Years of Chaos: Applied and Theoretical Procedia IUTAM 5 (2012), 195-198. 査読無
- ⑤ Zin Arai, Hiroshi Kokubu, and Pawel Pilarczyk, Recent development in rigorous computational methods in dynamical systems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 26 (2009), 393-417. 査読有
- ⑥ Zin Arai, William Kalies, Hiroshi Kokubu, Konstantin Mischaikow, Hiroe Oka, and Pawel Pilarczyk, A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 8 (2009), 757-789. 査読有

[学会発表] (計 16 件)

- ① Hiroshi Kokubu, Topological Computation Method for Dynamical Time Series Analysis and its Applications, The First International Conference on Dynamics of Differential Equations, Georgia Institute of Technology, Atlanta, U. S. A., March 15-20, 2013 (国際学会, 招待講演)
- ② Hiroshi Kokubu, Topological computation method for global dynamics and its application, Nonlinear Partial Differential Equations, Dynamical Systems and Their Applications, RIMS, Kyoto University, September 3-6, 2012 (国際学会, 招待講演)
- ③ 國府寛司, ダイナミクス全構造計算による新しい相空間構造解析の方法とその応用, 計測自動制御学会 第 50 回自律分散システム部会研究会, テーマ: 脳・身体に内在する複雑な力学システムの理解に向けて, 京都大学吉田キャンパス 京都大学百周年時計台記念館 国際交流ホール, 2012 年 6 月 15 日 (国内学会, 招待講演)
- ④ Hiroshi Kokubu, Topological Computation Methods for Global Dynamics and Bifurcations, Part 1: Theory, Part 2: Application, NCTS Workshop on Dynamical Systems, National Center for Theoretical Science, National Tsinghua University, Hsinchu, Taiwan, May 16-19, 2012 (国際学会, 招待講演)
- ⑤ Hiroshi Kokubu, Topological-computational methods for analyzing global dynamics and bifurcations, IUTAM Symposium on 50 years of chaos, Kyoto University, Japan, November 28 - December 2, 2011 (国際学会, 招待講演)
- ⑥ Hiroshi Kokubu, Graph-based topological computation method for global analysis of dynamics and its application to time series analysis, Workshop on Applied Topology, JR 博多駅ビル 10F 博多シティ会議室, 2011 年 8 月 30 日~9 月 2 日 (国際学会)
- ⑦ Hiroshi Kokubu, Computational Analysis of global dynamics and bifurcations, Mini-Symposium "Computational Approach to Global Dynamics", ICIAM, Vancouver, Canada, July 18-22, 2011 (国際学会)
- ⑧ Hiroshi Kokubu, Graph based topological computation for global analysis of dynamical systems, Conference on Computational Methods in Dynamics, ICTP, Trieste, Italy, July 4-8, 2011 (国際学会, 招待講演)
- ⑨ Hiroshi Kokubu, Topological bifurcation theorems for Morse decompositions, International Conference "Far-From-Equilibrium Dynamics", RIMS, Kyoto University, Kyoto, Japan January 4-8, 2011 (国際学会, 招待講演)
- ⑩ Hiroshi Kokubu, A topological-computational method for global analysis of dynamical systems, RIMS Workshop "Structures of Attractors in Dissipative Systems", RIMS, Kyoto University, Kyoto, Japan, November 15-17, 2010 (国際学会, 招待講演)
- ⑪ Hiroshi Kokubu, Rigorous Topological Computation of Dynamics and Applications, Long-term workshop: Mathematical Sciences and Their Applications, Hotel Rako-Hananoi, Kamisuwa, Nagano, Japan, September 19-October 2, 2010 (国際学会, 招待講演)
- ⑫ 國府寛司, 力学系の位相計算的方法とその応用, 公開シンポジウム "統合複雑系科学への招待", 京都大学理学研究科セミ

- ナーハウス, 京都, 2010年8月5日(国内研究集会)
- ⑬ 國府寛司, 力学系の位相計算的方法とその応用, 力学系研究会, 2010年3月27-29日, 慶應義塾大学(国内研究集会)
  - ⑭ Hiroshi Kokubu, A method for constructing databases for global dynamics of multi-parameter systems, Japan-Taiwan Joint Workshop on "Numerical Analysis and Scientific Computations", Department of Mathematics, National Taiwan University, November 7-8, 2009 (国際学会, 基調講演)
  - ⑮ Hiroshi Kokubu, A method for constructing databases for global dynamics of multi-parameter systems, International Workshop on "What is Evolution?" - Bicentennial of Charles Darwin's Birth -, October 15-18, 2009, COOP-INN Kyoto Conference Hall (国際学会, 招待講演)
  - ⑯ 國府寛司, A method for constructing databases for global dynamics of multi-parameter systems, 研究集会「トポロジーとコンピュータ 2009」2009年8月31日-9月2日, 東京工業大学(国際学会)

[図書] (計1件)

- ① Zin Arai, Hiroshi Kokubu, and Ippei Obayashi, Capturing the global behavior of dynamical systems with Conley-Morse graphs, in "Advances in Cognitive Neurodynamics (III)", Springer, 2013, pp. 665-672. ISBN 978-94-007-4791-3

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

國府 寛司 (KOKUBU HIROSHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号: 50202057

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

荒井 迅 (ARAI ZIN)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号: 80362432

岡 宏枝 (OKA HIROE)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号: 20215221

大林一平 (OBAYASHI IPPEI)

京都大学・大学院理学研究科・特定研究員

研究者番号: 30583455