

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年3月17日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21340037

研究課題名（和文）

シュレディンガー作用素に対するスペクトル漸近解析

研究課題名（英文）

Spectral asymptotic analysis for Schrödinger operators

研究代表者

田村 英男 (Tamura Hideo)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：30022734

研究成果の概要（和文）：本研究では、2次元散乱系のレゾナンスにみるアハラノフ・ボーム効果（AB効果）を追究した。一つの障害物とコンパクトな台をもつ2つのポテンシャルからなる散乱系を対象とし、障害物は互いに離れた2つの台の間に位置し、磁場を完全に遮蔽しているものとした。2つのポテンシャルの台の間で補足される軌道から複素平面の正の実軸近傍に生成されるレゾナンスの位置に磁束が深く関与することを示し、磁場散乱のレゾナンス問題においてAB効果が深く関与することを初めて明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We have studied the Aharonov-Bohm effect (AB effect) in resonances through a simple scattering system in two dimensions. The system consists of three scatterers, one bounded obstacle and two scalar potentials with compact supports at large separation, where the obstacle is placed between two supports and shields completely the support of a magnetic field. We have obtained that the resonances are generated near the real axis by the trajectories trapped between two supports of the scalar potentials and that the location depends heavily on the magnetic flux. This clarifies that the AB effect is deeply involved in resonances for magnetic scattering.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3,200,000	960,000	4,160,000
2010年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2011年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2012年度	2,800,000	840,000	3,640,000
総計	11,600,000	3,480,000	15,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学 (4105)

キーワード：(1) 関数方程式の大域理論 (2) スペクトル散乱理論 (3) 磁場散乱

(4) シュレディンガー作用素 (5) アハラノフ・ボーム効果 (6) レゾナンス

1. 研究開始当初の背景

量子力学が提供する数学の問題は広く深くそして豊かである。その研究対象であるミクロな世界では古典力学的な観点から説明できない注目すべき現象がしばしば生じる。このような自然現象は量子効果とよばれ、ひとつひとつが数学解析の格好の題材を提供している。本研究の背景には、スペクトル理論において培われた漸近的手法を用いて、量子効果の背後に潜む現象を数学的視点に立って解析することある。例を挙げれば、プランク定数に相当する微小媒介変数の零極限をとることによって、古典力学との関係をみる準古典近似問題、高エネルギーおよび低エネルギー領域での固有値の漸近分布（ワイル公式とよばれる）あるいは古典粒子の捕捉現象によって実軸近傍に生成されるレゾナンス（散乱極）の分布などが中核を占める課題である。

本研究が最も力を注いだ量子効果は、アハラノフ・ボーム効果である。量子力学に従う粒子が磁場の中を運動するとき、磁場のみならず、それを生成するベクトルポテンシャル自身もその運動に関与する。量子力学の根幹に関するこの現象は、アハラノフ・ボーム効果、通称 AB 効果とよばれている。スペクトル漸近解析を駆使し、2次元磁場の散乱系のレゾナンスを考察した。レゾナンス問題は、数学的散乱理論の現在を主導している中心的な研究課題で、精力的な研究活動が欧米において展開されているが、本研究が行った「磁場散乱のレゾナンスにみる AB 効果」の

課題は、他に類を見ない独自の試みである。

2. 研究の目的

すでに述べたように、本研究は、量子効果の背後に潜む数理現象の追究を目指し、スペクトル漸近性に関わる次の3つの課題を研究目的にかかげた：

(1) 複数のソレノイド磁場による散乱に対する準古典漸近解析

(2) 長距離型ポテンシャルによる散乱に対する低エネルギー領域での漸近解析

(3) 指数積公式による熱核近似と大次元空間における積分の漸近解析

いずれの課題も量子効果に深い関りを有する。課題(1)はアハラノフ・ボーム効果に、(2)はグローリー効果およびエフィモフ(Efimov)効果に、そして(3)は量子現象の観測における量子ゼノン効果に関係する。

3. 研究の方法

個人で行う理論研究のため、研究方法は研究集会に参加し、同じ分野の研究者と課題に関する討論と情報収集による標準的なものである。そのため、研究経費の大部を旅費に費やした。情報交換は、主として京都大学数理解析研究所で定期的開催されている「作用素論セミナー」（主催者 竹井・岩塚・峯）の場で行った。また、研究分担者が主催した研究集会の運営経費の一部にも費やされ、課題達成のための情報交換および討論の場を提供した。下記の研究集会が主なものである：(1) 夏の作用素論シンポジウム（主催者 岩塚）(2009 盛岡・2010 松本・2011 熊本・2012 新潟) (2) 姫路偏微分方程式研究集会

(主催者 藤家) (2009-2012) (3) 準古典解析セミナー (主催者 藤家) (2010, 2012 立命館大学草津キャンパス)。

4. 研究成果

研究目的 (1) においては、磁場散乱におけるレゾナンスにみるアハラノフ・ボーム効果 (AB 効果) に焦点を絞り、スペクトル理論で培われた漸近的手法を用いて解析した。AB 効果は、量子現象のなかでもっとも注目すべき量子効果のひとつであるが、数学的な側面からの解析はまだ十分になされているとは言い難い。磁場散乱のレゾナンス問題における AB 効果の数学的な研究成果は、本研究によって初めて為されたものであり、研究目的に挙げた課題のひとつが順調に進展したものと判断できる。研究成果の概要で要約した主結果を一連の論文において公表した (雑誌論文 1,2,3,4)。

レゾナンス問題を難しくさせるひとつの要因は、対象とする積分作用素の積分核が指数的に増大することであり、振動性を用いる標準的な手法の適用を阻む。本研究において、複素積分によって表現させるグリーン関数の最急降下法による漸近解析法やグリーン関数の complex scaling 法による反復などの新しい手法が開発された。これらの手法は、磁場を遮蔽する障害物を複数個に増やした散乱系において生じる捕捉現象の解析に有効である。とくに、2 個の場合は、3 次元のトーラス磁場散乱の 2 次元モデルを提示し、基本的かつ興味ある散乱系のひとつとなる。現在、この問題に取り組んでおり、得られた結果の一端についてはすでに口頭発表も行ってきた (学会発表 1,2)。

研究目的 (2,3) については、研究期間内において目新しい成果をあげることが残念ながらできなかった。目的 (2) の低エネルギー

領域での漸近解析は、最近のスペクトル理論では注目を浴びている研究課題のひとつである。例えば、散乱行列の零エネルギー近傍での漸近挙動の問題やエフィモフ効果に代表される多体系シュレディンガー作用素の負の固有値の問題などに進展がみられる。後方散乱振幅の低エネルギー領域での特異な挙動 (グローリー効果) や 磁場を有する 2 次元 3 体系作用素の負の固有値問題などを今後の継続研究課題として追究したい。(3) については、当初の目的とした大次元空間での積分の漸近解析までには至らなかった。指数積 (トロッター・加藤の積公式) による近似の作用素ノルム収束、積分核の収束および収束誤差評価について、分担者 一瀬 孝氏との数年来にわたる共同研究から得られた一連の成果を総合報告の形で発表した (雑誌論文 5)。この報告は、M. Krein 生誕 100 年記念集会での講演に基づくものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① H. Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, *Kyoto J. Math.*, 52 (2012), 557-595 (査読有)

DOI 10.1215/21562261-1625199

② H. Tamura and I. Alexandrova, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two with potentials with supports at large separation, *Ann. Henri Poincaré* 12 (2011), 679-721 (査読有)

DOI 10.1007/s00023-011-0088-1

③ H. Tamura and I. Alexandrova, Resonance free regions in magnetic scattering by two solenoidal fields at large

separation, J. Func. Anal., 260 (2011),
1836-1885 (査読有)

DOI 10.1016/j.jfa.2010.12.005

④ H.Tamura, Asymptotic analysis for Green functions of Aharonov-Bohm Hamiltonian with application to resonance widths in magnetic scattering, Math. J. Okayama Univ., 53 (2011), 1-37 (査読有)
<http://www.math.okayama-u.ac.jp/mjou/mjou53>

⑤ T.Ichinose and H.Tamura, Results on convergence in norm of exponential product formulas and pointwise of the corresponding integral kernels, Oper. Theory Adv. Appl., 190 (2009), 315-327 (査読有)

[学会発表] (計 16 件)

① 田村 英男, 磁場散乱のレゾナンスにみる AB 効果, 2012 年 12 月, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所

② 田村 英男, スペクトル漸近解析を学んで, 2012 年 11 月, 第 23 回「数理物理と微分方程式」, 国民宿舎野呂高原ロッジ, 広島県呉市

③ Hideo Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, 2012 July, 4th St-Petersburg Conference in Spectral Theory, Euler Institute, Saint-Petersburg, Russia

④ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果—2つの障害物の場合—, 2012 年 4 月, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所

⑤ 田村 英男, 2次元磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果, 2012 年 11 月, 第 22 回「数理物理と微分方程式」, ヒルズサンピア

山形

⑥ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果Ⅲ (Ⅱの復習, 訂正そして改良), 2011 年 9 月, 夏の作用素論シンポジウム, 熊本市国際交流会館

⑦ H.Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrödinger operators in two dimensions, 2012 June, Scattering Theory, An International Workshop in Tokyo, University of Tokyo

⑧ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果Ⅱ, 2011 年 4 月, 作用素セミナー, 京都大学数理解析研究所

⑨ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果, 2010 年 11 月, 第 21 回「数理物理と微分方程式」, かんぼの宿 修善寺, 静岡県伊豆市

⑩ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果, 2010 年 9 月, 夏の作用素論シンポジウム, 松本市中央公民館Mウィング南

⑪ 田村 英男, ソレノイド磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果, 2010 年 9 月, 数理科学セミナー, 大阪電気通信大学寝屋川キャンパス

⑫ 田村 英男, 磁場散乱におけるレゾナンスと AB 効果, 2010 年 7 月, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所

⑬ 田村 英男, 2つのソレノイド磁場による散乱におけるレゾナンスについて, 2009 年 11 月, 作用素論セミナー, 京都大学数理解析研究所

⑭ 田村 英男, アハラノフ・ボーム作用素のグリーン関数の漸近解析とそのレゾナンス問題への応用, 2009 年 10 月, 学習院大学スペクトル理論セミナー, 学習院大学

⑮ 田村 英男, アハラノフ・ボーム作用素のグリーン関数の漸近解析とそのレゾナンス問題への応用, 2009 年 9 月, 夏の作用素論シ

ンポジウム, いわて県民情報交流センターア
イーナ, 盛岡市

㊦ 田村 英男, アハラノフ・ボーム作用素の
グリーン関数の漸近解析とそのレゾナンス
問題への応用, 2009年9月, 広島応用解析セ
ミナー, 広島大学工学部

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 30022734

(2) 研究分担者

中野 史彦 (NAKANO FUMIHIKO)
学習院大学・理学部・教授
研究者番号: 10291246

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号: 40184890

藤家 雪朗 (FUJIE SETURO)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 00238536

川下 美潮 (KAWASHITA MISHIO)
広島大学・理学研究科・教授
研究者番号: 80214633

廣川 真男 (HIROKAWA MSAO)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 70282788
(H21, 22, 23: 研究分担者)

足立 匡義 (ADACHI TADAYOSHI)
神戸大学・理学研究科・教授
研究者番号: 30281158

(H21, 22: 研究分担者)

一瀬 孝 (ICHINOSE TAKASHI)
金沢大学・名誉教授
研究者番号: 20024044
(H22, 23, 24: 研究分担者)

寛 知之 (KAKEHI TOMOYUKI)
岡山大学・自然科学研究科・教授
研究者番号: 70231248
(H23, 24: 研究分担者)

(3) 連携研究者

河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)
岡山大学・自然科学研究科・准教授
研究者番号: 80432904

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授
研究者番号: 90378597