

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2014

課題番号：21360045

研究課題名(和文) 離散凸パラダイムによる最適化統一理論

研究課題名(英文) Unified Optimization Theory by Discrete Convex Paradigm

研究代表者

室田 一雄 (MUROTA, Kazuo)

東京大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：50134466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,700,000円

研究成果の概要(和文)：工学や社会科学の諸分野における最適化の理論と応用を「離散凸パラダイム」によって統合する研究を行った。離散凸解析の理論と応用を、連続・離散軸、凸・非凸軸、分野横断軸、の3つの観点から整理することによって、個々の数 理的技法や応用諸問題の相互関係を明確にし、数理の深化、応用の開拓、ソフトウェアの整備の3つの観点から研究を行い、新たな展開を達成した。とくに、数理の深化については、L凸関数最小化アルゴリズムの詳細な解析やDC計画の枠組みの提示などの成果をあげた。

研究成果の概要(英文)：This research integrated the theory and application of optimization in various fields of engineering and social sciences by Discrete Convex Paradigm. We analyzed the theory and applications of discrete convex analysis, to clarify the mutual relationship of the individual mathematical techniques and problems in applications, from three aspects of the continuous-discrete axis, the convex-nonconvex axis, and the fields-transversal axis. Also we conducted research from three aspects of mathematical deepening, applications development, and software development, and achieved the new developments in Discrete Convex Paradigm. In particular, mathematical deepening includes the results of detailed analysis in L-convex function minimization algorithm and presentation of a framework of discrete DC programming.

研究分野：数理工学

キーワード：離散最適化 凸関数 双対性 劣モジュラ関数 マトロイド

## 1. 研究開始当初の背景

連続値の変数に関する最適化の分野では、凸関数の理論(凸解析)が中心的な役割を果たしている。凸解析の工学における意義として、(1) 双対性などの豊かで美しい数理的構造、(2) 数理モデルの数学的解析(感度解析やアルゴリズム設計)、(3) 応用などが挙げられる。一方、離散最適化の分野においては、凸解析のような統一的な視点は存在せず、混沌とした状況にあった。そこで、研究代表者は凸解析理論とマトロイド理論を融合し、離散関数を扱う統一的な枠組みとして離散凸解析の理論体系を提唱した。M凸関数とL凸関数の概念、構造定理(共役性、双対性)、最小化アルゴリズムなど、理論の大意が整備され、専門書(和書、洋書)として刊行された。それ以降も、概念の拡張、アルゴリズムの改良、応用分野の拡大が行われている。海外での研究も活性化している。

凸関数と離散構造と併せて考察する最適化の理論である「離散凸解析」は、分野横断的な数理手法として体系化されてきた。理論創始当初は、連続世界の凸解析に匹敵する理論を離散世界に構築することが目的とされていたが、近年では、連続と離散を繋ぐパラダイムとしても認識されている。諸分野における最適化の理論と応用を「離散凸パラダイム」によって統合しようとする試みを研究推進の軸とし、離散凸解析理論を新たな局面に発展させていくことが、本課題の動機である。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、工学や社会科学の諸分野における最適化の理論と応用を「離散凸パラダイム」によって統合することにある。「離散凸パラダイム」の横系は構造定理やアルゴリズムなどを代表とする数理であり、縦系は諸応用分野における具体的な問題である。そして、その結び目の役割を果たすのがソフトウェアである。

離散凸解析の理論と応用を、連続・離散軸、凸・非凸軸、分野横断軸、の3つの観点から整理することによって、個々の数理的技法や応用諸問題の相互関係を明確にし、数理の深化、応用の開拓、ソフトウェアの整備の3つの面で新たな展開を図ることを目的とした。

## 3. 研究の方法

目的の実現のため、(1) 数理の深化、(2) 応用の開拓、(3) ソフトウェアの整備、の3つの面で新たな展開を図っていった。(1)、(2)についてはサブテーマに分け、以下の6テーマに分類される内容を推進していった。

(1)- (連続・離散)最適化における連続と離散の関係は双方向であり、離散の極限として連続を捉えたり、離散の近似(あるいは緩和)として連続を用いたりすることができる。構造定理やアルゴリズムを統一する枠組

みを目指して、連続と離散の関係を定量的に示す定理を見出す研究を推進した。

(1)- (凸・非凸)実際の応用に現れる関数は凸関数とは限らないが、連続最適化の分野においては、凸関数の概念は非凸関数を捉える理論的な軸を成している。例えば、非凸関数に対するアルゴリズムは局所的な凸近似に基づいて設計され、非凸関数に対する双対理論は、ある意味の凸化を通じた共役関数(ルジャンドル変換の拡張)に基づいて構築されている。このような事実を参照しながら、離散世界において、凸関数を軸とする非凸関数の理論を構築することを目指した。

(1)- (離散凸性)グラフのマッチングの一般化である偶因子やジャンプシステムなどの離散システム上にも離散凸関数が定義できるという事実を踏まえて、効率的に解ける問題は離散凸性を有するという経験的事実を追究した。

(2)- (社会工学)オペレーションズ・リサーチ、数理経済学、ゲーム理論などの社会工学分野での応用を開拓した。ネットワーク構造上の経済学・ゲーム理論(ネットオークションなど)といった現代的課題への応用可能性に重点をおいた。

(2)- (システム工学)電気回路などを表す微分代数方程式の指数が離散凸性をもつこと、また、混合行列の階数が離散凸関数によって表現されることを踏まえて、集中定数系のシミュレーション技術における離散凸性の役割を明らかにすることを目指した。

(3) (ソフトウェアの整備)離散凸解析の理論を説明するデモンストレーション・ソフトウェアと、個別の応用分野をターゲットとしたアプリケーション・ソフトウェアを開発し、Web上で公開し、応用分野の研究者・実務家が離散凸解析の手法を享受できる環境を整備した。

## 4. 研究成果

「離散凸パラダイム」の横系をなす構造定理やアルゴリズムなどを代表とする数理、縦系をなす諸応用分野における具体的な問題、その結び目の役割を果たすソフトウェアの3つの面で新たな展開を図ってきた。「数理の深化」、「応用の開拓」、「ソフトウェアの整備」の観点から研究を推進し、以下の通りの成果を得た。

(1)マッチングモデルへ離散凸解析を応用することで、多くの既存のモデルを包含する一般的な枠組みを提案し、安定解の存在を示した。また、これに関する研究を著書としてまとめた。M凸関数のバリエーションを用いることで、今まで二部グラフに限定されてい

たマッチングモデルの拡張を、一般の有向グラフへと拡張する研究もすすめた。

Hatfield-Milgromの経済モデルを2者間の契約集合に半順序構造を導入することで一般化し、安定な割当の存在を示した。離散凸解析を用いた藤重・田村のモデルとHatfield-Milgromのモデルの統一モデル構築の研究の出発点となる成果である。

(2) 離散最適化における基本的なアルゴリズム(ダイクストラ法など)を離散凸解析の立場から見直して整理し、著書の形にまとめた。

(3) 劣モジュラ関数を費用関数とする集合被覆問題を導入し、劣モジュラ関数の離散凸性を利用した近似アルゴリズムを設計した。特に、グラフの頂点被覆問題の一般化に対しては、近似比が2となる。これに対して、線形費用関数の場合に多項式時間アルゴリズムの知られているグラフの枝被覆問題に対しては、線形近似比よりも良い多項式時間近似アルゴリズムが原理的に存在し得ないことを示した。

また、簡潔な表現をもつため、理論的にも実用的にも有用な効用関数のクラスである「グラフで表現可能な」効用関数に関する財の配分問題を考え、この関数が劣モジュラ及び優モジュラであるための必要十分条件を与えると共に、いくつかの重要なケースに対する効率的かつ高精度な近似アルゴリズムを提案した。

劣モジュラ最適化の応用研究として、無線通信網における干渉効果を考慮した情報伝送に関するAvestimehr, Diggavi, Tse(2007)のADTモデルの一般化である、Schrijver(1978)のポリリンク・システムを用いたフローのモデルを導入した。さらに、高速Fourier変換と劣モジュラ関数最小化を用いて、ADTモデルにおける最大流量を計算する効率的なアルゴリズムを与えた。

多重クラス待ち行列に関連して現れる特殊な劣モジュラ関数の最小化問題に対しては、計算幾何学的な高速アルゴリズムを設計した。

(4) 多重グラフにおける均等辺彩色を求める効率的なアルゴリズムを開発した。

(5) 離散凸関数に対して錐劣加法性の概念を定式化し、L凸関数とM凸関数がこの性質を有することを示した。これによって、離散凸関数の制約付き最小化アルゴリズムとして、ヒルベルト基底に基づくものが設計できるようになった。

(6) 一次の多項式行列である行列束に対して2種類の組合せ論的特徴量を自然な形で定義し、それぞれが離散凸性をもつことと、2者の間にルジャンドル双対性が成り立つこ

とを示した。行列束に関連して現れる離散凸性に関して、ルジャンドル共役性を指摘し、行列束への構造的アプローチにおける共役性の意義について論じた。

また、混合多項式行列の小行列式の最大次数を計算するために、組合せ緩和法を用いた新たなアルゴリズムを提案した。また、副産物として、線形付値独立割当て問題に対する新たなアルゴリズムを与えている。

(7) M凹関数であることが知られていたマトロイドの階数関数の重み和がM凹関数であるための必要条件について検討した。

(8) M凸関数の連続緩和である凸閉包関数が効率的に計算可能であることを示した。これにより、M凸関数に関するNP困難問題に対する連続緩和手法が利用可能となった。

(9) 2つの連続凸関数の差で書かれる関数であるDC関数(DC = difference of convex functions)の最適化は非凸最適化の理論において最も成功しているものの1つであり、実用上ほぼすべての問題を記述できる表現力や双対定理を含む豊富な理論と効率的に局所最適解を求めるアルゴリズムが知られている。離散凸関数の理論を用いることで、離散関数の世界に対してDC関数の理論が展開できることを示した。

(10) 整数格子点上で定義される関数に対してヘッセ行列の離散版を定義し、その行列が正定値であることと関数の凸拡張可能性の関係について議論した。

(11) 応用の開拓を進める中で、処理時間が調整可能かつ分割処理可能なジョブのスケジューリング問題について、ポリマトロイド最適化問題としての定式化に基づき、分割統治アプローチによりこれまでより高速なアルゴリズムを得た。

(12) コールセンターのシフトスケジューリング問題に対する離散凸解析の応用について検討し、モデルの拡張を行うと共に、高性能な近似解法の提案を行った。

(13) 「ジャンプシステム上のM凹関数は、局所探索で効率良く最大化できる」という結果を利用し、triangle-free 2-マッチング問題に対する多項式時間アルゴリズムを与えた。未解決であった重み付き triangle-free 2 マッチング問題と、ジャンプシステム上のM凸関数との関係が明らかとなった。

(14) 離散凸最適化ソルバを公開し、ソルバを用いた予備品在庫管理やシフトスケジューリングなどの離散凸関数の応用に関する各種アプリケーション、各種離散凸関数最小化デモンストレーション等、離散凸パラダイ

ムのアプリケーション, デモンストレーション・ソフトウェアを整備し, WEB 上に公開した. 公開について, 論文にまとめ, 発表した.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計34件)

T. Maehara and K. Murota, A framework of discrete DC programming by discrete convex analysis, *Mathematical Programming, 査読有, Series A*, 2014.

DOI: 10.1007/s10107-014-0792-y

K. Murota and A. Shioura, Exact bounds for steepest descent algorithms of L-convex function minimization, *Operations Research Letters, 査読有*, 42, 2014, pp.361 - 366.

DOI: 10.1016/j.orl.2014.06.005

土村 展之, 森口 聡子, 室田 一雄, 離散凸最適化ソルバとデモンストレーションソフトウェア, *応用数学会論文誌, 査読有*, 23-2, 2013, pp.233 - 252.

<http://ci.nii.ac.jp/naid/110009616462>

K. Murota and A. Shioura, Dijkstra's algorithm and L-concave function maximization, *Mathematical Programming, 査読有, Series A*, 2013.

DOI: 10.1007/s10107-013-0643-2

Y. Kobayashi, K. Murota and R. Weismantel, Cone superadditivity of discrete convex functions, *Mathematical Programming, 査読有, Series A*, 135, 2012, pp.25 - 44.

DOI: 10.1007/s10107-011-0447-1

M. X. Goemans, S. Iwata, and R. Zenklusen, A flow model based on polylinking systems, *Mathematical Programming, 査読有, Series A*, 135, 2012, pp.1 - 23.

DOI: 10.1007/s10107-011-0446-2

S. Moriguchi, A. Shioura, and N. Tsuchimura, M-convex function minimization by continuous relaxation approach : proximity theorem and algorithm, *SIAM Journal on Optimization, 査読有*, 21-3, 2011, pp.633 - 668.

DOI: 10.1137/080736156

K. Murota, Submodular function minimization and maximization in discrete convex analysis, *RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有*, B23, 2010, pp.193 - 211.

<http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/handle/2433/177049>

[学会発表](計66件)

K. Murota, Discrete DC programming by discrete convex analysis, *Oberwolfach Workshop on Combinatorial Optimization*, 2014年11月11日, Oberwolfach (Germany). (招待講演)

室田 一雄, オークション理論と離散凸解析の接点, *ゲーム理論のフロンティア:理論と応用*, 2014年3月2~3日, 東京工業大学大岡山キャンパス(東京都・目黒区). (招待講演)

K. Murota, Discrete convex analysis: basics, DC programming, and submodular welfare algorithm, *NIPS workshop: Discrete Optimization in Machine Learning: Connecting Theory and Practice*, 2013年12月9日, Lake Tahoe (USA). (招待講演)

土村 展之, 離散凸関数の最小化ソルバ ODICON の開発, *日本応用数学会 LASM Workshop 2013 数学ソフトウェアの開発と実践*, 2013年9月10日, アクロス福岡(福岡県・福岡市). (招待講演)

S. Iwata, Weighted linear matroid parity, *Workshop on Matching, Matroids, and Extensions*, 2012年6月11~12日, Waterloo (Canada). (招待講演)

K. Murota, Introduction to discrete convex analysis, *Workshop on Modern Aspects of Submodularity*, 2012年3月19~22日, Atlanta (USA). (招待講演)

S. Moriguchi, Discrete convex analysis and inventory systems, *International Symposium on Mathematics of Logistics : Theory and Practices*, 2011年11月29~30日, 東京海洋大学(東京都・江東区). (招待講演)

A. Shioura, Overview of discrete convex analysis, *19th Triennial Conference of the International Federation of Operational Research Societies (IFORS 2011)*, 2011年7月10~15日, Melbourne (Australia).

S. Iwata, Submodular functions : Optimization and approximation, *International Congress of Mathematicians*, 2010年8月19~27日, Hyderabad (India).

田村 明久, 離散凸解析とマッチング理論, *日本経済学会春期大会特別セッション*, 2010年6月5日, 千葉大学(千葉県・千葉市). (招待講演)

[図書](計2件)

室田一雄, 塩浦昭義, 離散凸解析と最適化アルゴリズム, *数理工学ライブラリー2*, 朝倉書店(2013), 210ページ.

田村明久, 離散凸解析とゲーム理論, 朝倉書店(2009), 180ページ.

[産業財産権]

出願状況（計0件）

取得状況（計0件）

〔その他〕

ホームページ

DCP (Discrete Convex Paradigm)

<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/DCP/>

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

室田 一雄 (MUROTA, Kazuo)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号： 50134466

### (2)研究分担者

なし

### (3)連携研究者

田村 明久 (TAMURA, Akihisa)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号： 50217189

岩田 覚 (IWATA, Satoru)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・教授

研究者番号： 00263161

塩浦 昭義 (SHIOURA, Akiyoshi)

東北大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号： 10296882

森口 聡子 (MORIGUCHI, Satoko)

首都大学東京・社会科学部研究科・准教授

研究者番号： 60407351

垣村 尚徳 (KAKIMURA, Naonori)

東京大学・大学院総合文化研究科・特任講師

研究者番号： 30508180

小林 佑輔 (KOBAYASHI, Yusuke)

東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教

研究者番号： 40581591

土村 展之 (TSUCHIMURA, Nobuyuki)

関西学院大学・理工学部・教育技術職員

研究者番号： 20345119