

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 17 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21500001

研究課題名(和文) グラフを分割，彩色，描画するアルゴリズムの効率化とそれらの応用

研究課題名(英文) Efficient Algorithms for Partitionings, Colorings and Drawings of Graphs and their Applications

研究代表者

西関 隆夫 (NISHIZEKI, Takao)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：80005545

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：グラフの分割，彩色あるいは描画する問題の最適解や近似解を求める効率のよいアルゴリズムを開発するとともに，それらを実用的な問題に応用した．代表的な成果の一例を挙げる．点重み付きグラフ G と正整数 p が与えられたときに，何本かの辺を除去して G を p 個の連結成分に分割し，各成分の点重みの合計をできるだけ公平にするアルゴリズムを木幅限定グラフに対し開発した．

研究成果の概要(英文)：This research develops efficient algorithms for the partitioning, coloring and drawing problems of graphs, and applies them to practical problems in real world. One of the representative results is an algorithm for the fairest connected partition problem. It partitions a weighted graph G to a specified number of connected subgraphs by deleting edges from G so that the difference between the maximum sum of weights in a subgraph and the minimum one is as small as possible.

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：グラフ アルゴリズム 分割 彩色 描画

1. 研究開始当初の背景

インターネットのルート制御, Web での情報検索や情報圧縮, VLSI 設計, 並列計算のタスクスケジューリングや負荷分散, 電力網制御, 交通流制御, 略地図作成等いろいろな分野で現れる問題が, 点とそれらを結ぶ辺からなるグラフの問題として定式化できる. 特に, グラフをいくつかの部分グラフに分割する問題, グラフの点や辺に色を塗り, 隣り合う点や辺は異なる色にする問題, グラフを様々な評価基準の下で最適に描画する問題がよく現れる. それらの詳細は研究代表者の書著 “Planar Graph Drawing” (World Scientific 社, 2004 年) や “Planar Graphs: Theory and Algorithms” (Dover 社, 2008 年) を参照されたい. このようなグラフアルゴリズムとその応用の研究は, 日本および海外で極めて活発に行なわれており, 今後は, これらのグラフ問題を解くアルゴリズムの更なる効率化や近似アルゴリズムの開発, 更に具体的な応用への展開が望まれていた.

2. 研究の目的

本研究では, グラフ問題の中でも特に重要な, **分割**, **彩色**, **描画** に的を絞り, それらを解くアルゴリズムを開発し, 効率化をはかるとともに, 現実問題への応用へ発展させる. また, 従来のほとんどの手法はヒューリスティックであり, 解が存在するにもかかわらず解を見つけれなかったり, 解を見つけても最適解とは限らなかったが, これに対し, 本研究ではグラフアルゴリズムの分野で培われてきた手法を応用して, 解が存在する限り必ず解を見つけ, しかも最適に近い解を見つけることが理論的に保障されたアルゴリズムを与えることを目的としたものであり, これこそが本研究の一番の特色である.

(1) **分割** 実応用でよく現れる木, 直並列グラフ, 部分 k 木などにグラフを制限して, 効率のよいアルゴリズムを開発し, 更に, 最適解とは限らないが, 最適解に極めて近い近似解を求めるアルゴリズムを開発し, 実問題に適用して, アルゴリズムを評価し, 改良をはかる.

(2) **彩色** 彩色問題のいずれも NP 完全であり, 一般のグラフに対して厳密解を効率よく求めるアルゴリズムは存在しないと予想されるなか, 本研究では, 近似アルゴリズムを開発したり, 平面グラフや部分 k 木にグラフを限定して, 効率のよいアルゴリズムを開発する.

(3) **描画** グラフの各内面があらかじめ指定された面積を持つ軸平行 8 角形になるような “**面積指定 8 角形描画**” という新しい描画形式を提案する. 更に, ピア数最小な配線問題を, **折れ曲り最小直交描画** として定式化するとともに, 格子凸描画や影響矩形描画に対

しても面積の小さな描画を効率よく求めるアルゴリズムを開発する.

3. 研究の方法

(1) 5 年間の研究期間前半には, 「需要・供給分割問題を一般グラフに対し擬多項式時間で解くアルゴリズム」, 「均等分割問題を一般グラフに対し擬多項式時間で解くアルゴリズム」, 「リスト辺彩色が存在するための十分条件を求めるとともに, その条件を満たすならば, リスト辺彩色を効率よく求めるアルゴリズム」, 「面積指定 8 角形描画を求める効率のよい線形時間アルゴリズム」, 「直並列グラフの折れ曲がり数最小な直交描画を求めるアルゴリズム」の研究・開発を行う.

(2) 研究期間後半には, 前半に得られたアルゴリズムの一層の効率化をはかり, 電力網の配電等の問題への実用化や, 選挙区割問題への応用へ発展させ, 得られた理論的・実証的成果を論文としてまとめ, 国際会議, 国際学術雑誌で発表する.

4. 研究成果

本研究では, グラフ問題の中でも特に重要な, グラフの分割, 彩色, 描画問題に的を絞り, それらの最適解を求めるアルゴリズムや近似解を求めるアルゴリズムなどを開発するとともに, 具体的な現実問題への展開をはかった.

(1) 分割

需要・供給分割問題を一般グラフに対し擬多項式時間で解くアルゴリズムを設計した. 供給点が 1 個しかない場合には直並列グラフや部分 k 木に対して FPTAS (完全多項式時間近似スキーム) が存在することを示した. また, 均等分割問題を一般グラフに対し擬多項式時間で解くアルゴリズムを設計するとともに, 木に対しては多項式時間アルゴリズムを開発した.

木に関する需要・供給分割問題で辺に向きと重みがある場合に対し, 擬多項式時間アルゴリズムを与えるとともに, 多項式時間完全近似スキームを与えた.

需要点と供給点及びコスト付き有向辺からなる木を分割し, 各部分木には供給点が 1 つだけあり, その供給量はその部分木の需要量以上であり, しかもその部分木を供給点を根とする有向根付き木になるように元々の辺の向きを変更するコストの合計を最小化する問題に対し完全多項式時間近似スキームを与えた. この結果は電力配電計画問題に利用できる.

各点に非負整数重みが付いているグラフ G と正整数 p が与えられたとき, G から何本かの辺を除去して, G を p 個の互いに共通な点を持たない連結部分グラフに分割し, 部分グラフの点重みの合計の最大と最小の差をできるだけ小さくしたい. このような分割を

G の p -公平連結分割という。本研究では、 p -公平連結分割が直並列グラフや部分 k -木に対して擬多項式時間で求まり、特に点重みが全て1であるときには多項式時間で求まることを示した。

(2) 彩色

リスト辺彩色が存在するための十分条件を求めるとともに、その条件を満たすならばリスト辺彩色を効率よく求めるアルゴリズムを開発した。また、木の最小コスト辺彩色を求める問題がグラフのマッチングを応用して解けることを示し、極めて高速なアルゴリズムを設計した。

木のコスト辺彩色問題は新しく作られた二部グラフの完全マッチング問題に帰着できることを示して、効率のよいアルゴリズムを与えた。

直並列グラフ G の帯域幅連続多重彩色でスパンが最小なものを求める問題に対して、擬多項式時間厳密アルゴリズムおよび完全多項式時間近似スキームを与え、これらの結果を部分 k -木、即ち、木幅が定数であるグラフに拡張した。

点彩色の一般化である帯域幅連続多重彩色問題を木幅が限定されたグラフに対して解く完全多項式時間近似スキームを与えた。点や辺に非負整数重みが付いているグラフが与えられたときに、各点 v に点重み個の連続した整数を色として割り当て、各辺 (u, v) の端点 u と v に割り当てられた整数はその辺の重み以上離れているようにし、しかも用いる最大の整数をできるだけ小さくする問題である。この結果は周波数割り当て問題やスケジューリング問題に利用できる。

(3) 描画

最初にVLSIのレイアウトの配線や略地図作成などに現れるグラフ描画を扱った。VLSIのレイアウトでは、数千個ものモジュールをVLSIチップ上にうまく配置して、配線で結ばれるモジュールは互いに隣接させ、しかも各モジュールの面積要求も満足させたい。そこで、内部矩形描画、面積指定8角形描画、折れ曲り数最小直交描画の他に、開矩形勢力描画という新しい描画形式を定式化し、それらが存在するための必要十分条件を求めた。開矩形勢力描画では、直線分で描画された各辺によって定義される軸平行長方形内に他の点が存在しなく、見易い描画である。この開矩形勢力描画を求める線形時間アルゴリズムを求めた。

内部3連結グラフでその分解木に葉が4枚ある場合に対し、 $2n \times 4n$ の大きさの凸描画を求める線形時間アルゴリズムを与えて、従来の大きさを大幅に改善した。

平面グラフで格子凸描画するアルゴリズムを発展させた。内部3連結平面グラフ G の分解木 $T(G)$ に葉がちょうど4枚あるとき、 G を $2n \times 2n$ の大きさの整数格子内に線形

時間で格子凸描画するアルゴリズムの開発に成功した。

バランスよく二分割できるグラフは、小さい二次元格子上に直線描画できることを示した。更に、 n 点からなる直並列グラフは $(2n/3) \times (2n/3)$ 格子や面積 $0.394 n \times n$ の格子に直線描画できることを示した。この結果はグラフ可視化に応用できる。

(4) 応用

グラフ G にはソースが q 個あるとし、各ソースには供給量と呼ばれる非負整数が割り当てられ、ソース以外の点は全てシンクであり、需要量と呼ばれる非負整数が割り当てられ、各辺には容量と呼ばれる非負整数が割り当てられているとする。 G の全域林 F が全域配送林と呼ばれるのは、林 F が q 本の木からなり、各木 T にはソースが丁度1個含まれており、そのソースから T に含まれる各シンクへ需要量だけのフローを T 上の道に沿って流した時に、各辺に流れるフローの値がその辺容量以下であるときである。全域配送林問題とは、与えられたグラフ G に全域配送林 F が存在するかどうか判定する問題で、本研究では直並列グラフに対し全域配送林問題を解く擬多項式時間アルゴリズムを与え、そのアルゴリズムは部分 k 木に拡張できることを示した。

「辺容量付き電力需給ネットワーク」問題では、木であるグラフ G を取り扱い、はじめに定常木ネットワークに対する最大供給率を計算する多項式時間アルゴリズムを与え、次に、パラメトリック木ネットワークの分割問題に対するアルゴリズムを与え、すべての供給量、需要量および辺容量が変数の区分的線形関数であるとき、そのアルゴリズムの計算時間は擬多項式であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計19件)

M. Kawabata, T. Nishizeki, Spanning distribution trees of graphs, IEICE Trans. on Inf. & Syst., 査読有, E97-D, No.3, 2014, pp.406-412

DOI: 10.1587/transinf.E97.D.406

T. Nishizeki, X. Zhou, Small grid drawings of planar graphs with balanced partition, J. Combinatorial Optimization, 査読有, 24, 2012, pp.99-115

DOI: 10.1007/s10878-011-9381-7

T. Ito, T. Nishizeki, M. Schroder, T. Uno, X. Zhou, Partitioning a weighted tree into subtrees with weights in a given range, Algorithmica, 査読有, 62-3, 2012, pp. 823-841

DOI: 10.1007/s00453-010-9485-y
T. Ito, N. Sakamoto, X. Zhou, T. Nishizeki, Minimum cost edge-colorings of trees can be reduced to matchings, IEICE Trans., 査読有, 94-D, 2011, pp. 190-195

DOI: 10.1587/transinf.E94.D.190
Md. S. Rahman, K. Miura, T. Nishizeki, Octagonal drawings of plane graphs with prescribed face areas, Computational Geometry: Theory and Applications, 査読有, 42-3, 2009, pp. 214-230

DOI: 10.1016/j.comgeo.2008.09.002

研究者番号: 4 0 4 3 1 5 4 8

内沢 啓 (UCHIZAWA, Kei)
山形大学・工学部・准教授
研究者番号: 9 0 5 1 0 2 4 8

〔学会発表〕(計15件)

T. Nishizeki, Spanning Distribution Trees of Graphs, FAW-AAIM 2013, 2013年6月26日, 大連海事大学, 中国

T. Nishizeki, Parametric Power Supply Networks, COCOON 2013, 2013年6月21日, 杭州浙江大学, 中国

T. Nishizeki, Algorithms for Bandwidth Consecutive Multicolorings of Graphs, FAW-AAIM 2012, 2012年5月14日, 北京大学, 中国

T. Nishizeki, Minimum cost partitions of trees with supply and demand, ISAAC 2010, 2010年12月17日, Ramada Plaza Jeju, Korea

X. Zhou, Convex drawings of internal triconnected plane graphs on $O(n^2)$ grids, ISAAC 2009, 2009年12月18日, Ala Moana Hotel, USA

〔図書〕(計2件)

T. Nishizeki, M. D. Saidur, CRC Press Boca Raton, Handbook of Graph Drawing and Visualization, 2013, 31

西関 隆夫, 「情報処理学会50年のあゆみ」の章「グラフアルゴリズム」, 2010, 3

〔その他〕

ホームページ等

<http://ist.ksc.kwansei.ac.jp/~nishi/lab>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西関 隆夫 (NISHIZEKI, Takao)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号: 8 0 0 0 5 5 4 5

(3) 連携研究者

周 曉 (ZHOU, Xiao)

東北大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号: 1 0 2 7 2 0 2 2

伊藤 健洋 (ITO, Takehiro)

東北大学・大学院情報科学研究科・准教授