

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月15日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21500005

研究課題名（和文）計算機援用による計算困難性証明手法の確立

研究課題名（英文） Establishing Computer Assisted Proof Methods for Computational Intractability

研究代表者

天野 一幸 (AMANO KAZUYUKI)

群馬大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：30282031

研究成果の概要（和文）：本研究は、様々な計算モデルにおける計算量の評価手法の開発を目指したものである。その中でも特に、計算機援用型手法の開発を積極的に追及したものである。本研究を通じて、(1)定数段数論理回路モデルにおけるクリーク関数の計算量の厳密な値を明らかにした、(2)論理関数の多項式しきい値表現長に関する新たな計算機援用型手法の開発に成功した、(3)節の幅が限定された和積論理式における感受度の厳密な上界の解明に成功した等、多くの著しい成果が得られた。

研究成果の概要（英文）：The aim of this research is to establish the methods for analyzing the computational complexity in various computational models. Especially, this research pursues the use of computers as a central tool for the analysis. As a result, we obtain many significant results, of which we list some. (i) We determine the exact complexity for detecting clique structure of a graph by constant depth Boolean circuits, (ii) We develop a new method for analyzing the description length of Boolean functions in polynomial threshold representation based on computer analysis, and (iii) We determine the exact value of the maximum sensitivity of CNF formulas with bounded clause length.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：計算量理論

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：計算困難性，計算機援用証明，下界，論理回路，論理関数

## 1. 研究開始当初の背景

与えられた仕様を満足するハードウェアを構成するのに必要な部品の個数や、与えられた問題を解くのに必要な計算資源の量を最小化する問題を考えるとき、予めコスト最小化の限界点を明らかにしておくことは極めて重要である。この問題は、自然な形で、

論理関数に対する回路計算量の下界を導出する問題に帰着することができる。

計算機科学分野における最重要未解決問題とされる“ $P \neq NP$ 予想”の解決にも直接繋がるこの問題に対しては、国内外を通じて、半世紀以上に渡り精力的な研究が続けられているものの、現在のところ、入力サイズに

対して非線形的な下界さえ証明し得ていない。

この種の不可能性の証明は、一般に非常に難しく、理論計算機科学分野における挑戦的課題と位置づけられている。

本研究では、このような現状を打破すべく、計算困難性の証明手法の開発を目標とする。

近年の、計算機の飛躍的な性能向上、および、アルゴリズム理論の深化によって、従来は成し得なかった大規模な計算が行えるようになりつつある。本研究では、このような現況をも鑑みて、その中心的部分に計算機援用型の証明を積極的に取り入れた、計算量下界証明手法の追及を目指したものである。

## 2. 研究の目的

本研究の最終的な目標は、様々な計算モデルにおける計算困難性の証明手法を確立することである。これに向けて、本研究では、特に、計算機援用型証明手法の開発を積極的に追及する。

例えば、ある論理回路の構成には基本素子が 10 個以上必要であるといった定数的下界の証明は、全ての可能性を列挙・検証することにより行えるが、本研究は、この種のしらみつぶしの手法の高速化を目的とするものではない。計算量の漸近的値に対する、例えば、 $\Omega(n^2)$  といった、あるいは、指数関数的な、実際局面においても有意な下界の導出手法の開発を目指す。

具体的には、例えば、ある種の計算モデルにおける計算量の下限が目的関数となるような大規模な数理計画問題として定式化し、これを解くことにより下界を得る、という形を想定する。この際、異なる計算モデルに対しては、異なるタイプの数理定式化が対応することが予想される。では、具体的に、どのモデルに対してどの数理モデルが適しているのかについて、理論的考察や計算機実験を通じて明らかにする。

本研究では、このような様々なアプローチに基づく試みを通して、各種計算モデルにおける計算困難性の証明手法の確立を目指すものである。

## 3. 研究の方法

本研究は、各種計算モデルにおける、計算機援用型の計算困難性の証明手法の確立を目指すものである。これに向けて特に以下のアプローチを重視する。(1) 論理回路、論理式等の具体的計算モデルにおける計算過程を数学的厳密性をもち理論的に解析する。

(2) 上のステップで得られた解析結果を、様々な最適化問題のフレームワークに取り

入れ、一般化することにより、計算機援用型の計算困難性証明手法を構築する。

本研究では、特に、論理関数に対する定数段数論理回路、多項式しきい値表現形や和積表現形等のさまざまなプリミティブな表現形式を取り上げ、これらモデルにおける論理関数の計算量評価手法の開発を重視する。これは、計算困難性の解析には、その計算過程に対する厳密な解析が必要であるとの認識に立ち、このためには可能な限り原始的な計算モデル上で考えることが有功であるとの立場による。

理論的解析と計算機を用いた解析を相互に行き来しつつ研究を進める。理論的解析の段階においては、組み合わせ論やグラフ理論等に関する深い知識や最新の研究動向を知るために、当該分野の研究集会等へ参加する。また、得られた結果は、国内外の会議において積極的に発表することを目指した。

## 4. 研究成果

本研究は、様々な計算モデルにおける計算量の評価手法の開発を目指したものである。その中でも特に、計算機援用型の手法の開発を積極的に追及したものである。本研究で得られた主な成果を以下に示す。

(1) 乱化決定木で論理関数を評価する際における、指向性の制約が計算量に与える影響について調べた。特に、CNF 式をベースにした対象関数について計算機を用いて系統的に調査することにより、これまで知られるものよりも大きな影響を与える論理関数の具体的な構成法を与えた。この結果は、国際会議 CATS において発表した。

(2) 論理関数の多項式しきい値表現について研究を行い、平均表現長を計算機援用のもとに求める新たな手法を開発した。また本手法を用いて、論理関数の平均多項式しきい値密度に対する、従来知られる最良の上界を改良することに成功した。この結果を国際会議 ISAAC において発表した。

(3) 定数段数論理回路モデルについて、最近 Rossman によって新たに開発された下界証明手法を用いて示されたクリーク関数の下界が、既にタイトであることを、下界サイズにマッチする論理回路を具体的に構成することにより示した。本結果を、国際学術論文誌 Computational Complexity において発表した。

(4) 本研究によってこれまで開発して来た計算機援用型の計算量評価手法について、欧州

の理論計算機科学分野の権威あるEATCSより、これらの手法をまとめたサーベイ論文の寄稿を求められ、これをBulletin of EATCSにおいて発表した。

(5)各節に含まれるリテラルの個数を高々 $k$ に限定した和積標準形論理式(CNF)の感受度に関する研究を行った。まず、このような論理式の最大感受度が $k$ であることを予想したODonnellの予想を肯定的に解決することに成功した。更にこれを発展させ、感受度の高い論理関数で、かつ、本質的に非同形であるものが少なくとも $k$ の二重指数関数的な個数存在することを証明した。また、計算機援用型の証明により、 $k$ の値が3以下の場合には、このような条件を満たす式を完全に特定することに成功した。本結果は、国際学術論誌、および、国際会議にて発表を行った。

(6)感受度と並んで、論理関数の複雑さの尺度として広く用いられる、ブロック感受度について研究を行った。その結果、最小項が推移的であるような論理関数で、かつ、この値が漸近的に最も小さな論理関数を特定することに成功した。これは、Druckerらによって最近提唱された未解決問題を、肯定的に解決したものである。本結果は、国際学術論文誌に投稿し掲載された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

① 天野 一幸, Minterm-Transitive Functions with Asymptotically Smallest Block Sensitivity, Information Processing Letters, 査読有, 111(23-24), 1281-1284, 2011.

② 天野 一幸, On Directional vs. General Randomized Decision Tree Complexity for Read-Once Formulas, Chicago Journal of Theoretical Computer Science, 査読有 2011(3), 1-11, 2011.

③ 天野 一幸, 垂井 淳, A Well-Mixed Function with Circuit Complexity  $5n$ : Tightness of the Lachish-Raz-type Bounds, Theoretical Computer Science, 査読有, 412(18), 1646-1651, 2011.

④ 天野 一幸, Tight Bounds on the Average Sensitivity of  $k$ -CNF, Theory of Computing, 査読有, 7, 45-48, 2011

⑤ 福原 秀明, 瀧本 英二, 天野 一幸, NPN-Representatives of a Set of Optimal Boolean Formulas, IEICE Trans. on Fund. Elect. Communications and Computer Science, 査読有, E93-A-6, 1008-1015, 2010.

⑥ 天野 一幸, New Upper Bounds on the Average PTF Density of Boolean Functions, Lecture Notes in Computer Science, 査読有, 6506, 304-315, 2010.

⑦ 天野 一幸,  $k$ -Subgraph Isomorphism on ACO Circuits, Computational Complexity, 査読有, 19(2), 183-210, 2010.

[学会発表] (計11件)

① 天野 一幸, On Extremal  $k$ -CNF Formulas, European Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Applications, 2011.9.2, Renyi 研究所 (ブタペスト, ハンガリー)

② 天野 一幸, もっとも敏感な $k$ -CNF, 情報処理学会アルゴリズム研究会, 2011.5.16, 秋田県立大学 (秋田県)

③ 早坂 智行, 天野 一幸, 多項式しきい値関数密度の上界の改善, 第73回情報処理学会全国大会, 2011.3.4, 東京工業大学 (東京都)

④ 天野 一幸, Bounding the Randomized Decision Tree Complexity of Read-Once Boolean Functions, The 22<sup>nd</sup> Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2011), 2011.1.25, HolidayInnHotel (サンフランシスコ, アメリカ合衆国)

⑤ 天野 一幸, New Upper Bounds on the Average PTF Density of Boolean Functions, The 21<sup>st</sup> International Symposium on Algorithm and Computation (ISAAC 2010), 2010.12.15, ラマダプラザホテル (濟州島, 韓国)

⑥ 天野 一幸, 論理関数の乱化計算機計算量について, 日本OR学会NEO研究集会, 2010.12.7, 京都大学 (京都府)

⑦ 島田 学, 天野 一幸, ギガ頂点グラフのハミルトン路探索と中間層予想について, 電子情報通信学会コンピュテーション研究会, 2010.5.19, 北陸先端科学技術大学 (石川県)

⑧ 天野 一幸,  $K$ -subgraph Isomorphism on ACO Circuits, The 24<sup>th</sup> IEEE conf. on

computational complexity, 2009.7.15, ポ  
アンカレ研究所 (パリ, フランス)

⑨天野 一幸, Bounds on the Size of Small  
Depth Circuits for Approximating Majority,  
The 36<sup>th</sup> International Colloquium on  
Automata, Languages and Programming  
(ICALP09), 2009.7.9, ロドスパレスホテル  
(ロドス, ギリシャ)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

天野 一幸 (AMANO KAZUYUKI)  
群馬大学・大学院工学研究科・准教授  
研究者番号：30282031

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：