

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月30日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009年度～2011年度

課題番号：21500007

研究課題名（和文） パラメータ化グラフアルゴリズムの研究

研究課題名（英文） Research on parameterized graph algorithms

研究代表者

武永 康彦（TAKENAGA YASUHIKO）

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：20236491

研究成果の概要（和文）：

比較可能グラフから辺の削除を行って得られる比較可能 $-k$ e グラフをはじめ、置換グラフ、グリッドグラフに辺の削除や追加を行って得られるグラフ族などに対する頂点彩色問題、木に辺を追加したグラフの同型性判定問題に対する効率的なアルゴリズムの設計、計算困難性の証明を行った。また、効率的なアルゴリズムが設計可能となる、問題とパラメータ化グラフ族の性質の組合せを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：

We have developed fixed-parameter algorithms or proved the hardness of vertex coloring problems on parameterized graphs obtained by adding or deleting edges from graphs in classes such as comparability graphs, permutation graphs and grid graphs. We have also developed a fixed-parameter algorithm for isomorphism of tree $+k$ e graphs. In addition, we have clarified the property of problems and parameterized graph classes which makes it possible to design fixed-parameter algorithms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム、グラフ、計算量

1. 研究開始当初の背景

グラフ上の種々の問題に対するアルゴリズムについては、その重要性から古くより盛んに研究が行なわれている。しかし、実用的に重要なグラフ問題の中にも、一般的に計算困難とみなされる NP 完全問題が非常に多く含まれている。そのため、近似アルゴリズムや、特定の条件のもとで多項式時間で解くア

ルゴリズムなど、これらの問題を実用的に解くための様々な手法が研究されている。そのようなアプローチのひとつとして、一般には NP 完全となる問題が、特定のグラフ族に対しては多項式時間で解けることが広く知られ、数多くの研究がなされている。

一方、近年になって、計算困難な問題に対するアプローチとして、パラメータ化計算量、

パラメータ化アルゴリズムの概念が注目されている。これは、従来用いられてきた入力サイズだけでなく、入力データの性質などを表すパラメータを計算量の評価に用いるものである。これにより、一般には計算困難であっても、パラメータの値が小さな入力に対しては効率的な計算が可能である、といった評価が可能になる。

一般に計算困難な問題が、特定のグラフ族に対しては多項式時間で解ける場合、このグラフ族に「近い」グラフに対しても多項式時間アルゴリズムが存在する可能性があると考えられる。その「近さ」をパラメータとして扱うことにより、具体的には、グラフ族 F に近いグラフとして、 F に属するグラフに k 本の辺、あるいは k 個の頂点を付加または削除して得られるグラフが考えられている。グラフ族 F に属するグラフに k 本の辺を付加、削除して得られるグラフを $F+k_e$ 、 $F-k_e$ グラフと呼ぶ。このようなパラメータ化グラフに対するアルゴリズムについては頂点彩色問題を中心にいくつかの研究が行なわれている。しかし、まだこの分野の研究は少なく、頂点彩色以外の問題はあまり扱われていない。

与えられたグラフと特定のグラフ族の間の違いを与えられていない場合、その近さを判定することが必要となるが、与えられたグラフに対し、最少数の辺の付加または削除等により、特定のグラフ族に含まれるようにする問題については、すでにある程度研究がなされている。これらの研究成果とパラメータ化グラフに対するアルゴリズムにより、従来多項式時間アルゴリズムが知られていなかった広い範囲のグラフに対して、効率的な処理手法を提案することができると考えられる。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、第一に個々のパラメータ化グラフに対する種々の問題のアルゴリズムの設計、および計算量の解明を目指した。主要なグラフ族に辺や頂点の付加、削除を行なうことができるパラメータ化グラフに対して、小さなパラメータの値の入力に対して効率の良いアルゴリズムとみなされている **fixed parameter tractable** アルゴリズムを設計することにより、従来より広範なグラフに対して効率的な処理を可能にする。具体的には、頂点彩色問題についてパラメータ化グラフに対する計算量がまだ解明されていない主要なグラフ族を対象とするほか、それ以外の問題も扱う。あるいは、効率的なアルゴリズムの設計が原理的に不可能である場合には、パラメータ k が特定の値以上では NP 完全であることを証明し、それ未満の場合は多項式時間で解けるアルゴリズムを示すことを目

標とする。また、これらの研究により、効率的なパラメータ化アルゴリズムが得られるグラフ族の範囲も解明される。

(2) 発展的目標として、個々の問題だけを対象とするのではなく、より一般的に成り立つ性質を解明することを目指した。問題の性質により辺の付加、削除により計算困難になりやすい問題と、これらの計算量への影響が少ない問題が存在すると考えられるため、種々の問題のこのような性質による分類など、一般的な性質についても解明したいと考えた。

3. 研究の方法

(1) パラメータ化グラフを対象として、具体的な問題に対するアルゴリズムの設計および計算困難性の証明を行うことを中心に研究を進める。具体的には、第一に、比較可能グラフをパラメータ化したグラフの頂点彩色問題について研究を行なう。比較可能 k_e グラフについては、 k が 2 以上の場合の計算量がまだ明らかになっていないため、その場合について計算量を解明する研究を行なう。さらに、それ以外のグラフ族に辺の追加や削除を行なうて得られるグラフ族の頂点彩色問題についても、その複雑さが未解決の主要なグラフ族についてアルゴリズムの設計、または計算困難性の証明を行う。

頂点彩色問題以外の問題についても研究を進め、最大クリーク問題、頂点被覆問題などの主要なグラフ上の NP 完全問題のいくつかについて、頂点彩色問題の場合と同様に研究を進める。また、辺の付加、削除の両方を許す場合についても、付加または削除のみの場合の結果を参考に研究を進める。

(2) パラメータ化グラフ上の問題の複雑さについて、個々のグラフ族と問題を扱うのではなく、より一般的に成り立つ性質を解明することを目指す。第一のアプローチとして、ある問題に対し、グラフ族 F をパラメータ化したものが、常に **fixed parameter tractable** になる、NP 完全になるなどの特定の性質を満たすような、グラフ族 F の性質を考える。そのためには、個々の問題の従来解法をパラメータ化アルゴリズムの基本的な設計手法と組み合わせる必要があると考えられる。第二のアプローチとして、辺あるいは頂点の付加、削除が計算量に影響を及ぼしやすい問題と、そうでない問題の性質の解明を目指して研究を行なう。問題がある特定の性質を持つならば、辺の付加、削除により計算量の増加が小さく（あるいは大きく）なることを示すことができれば、個々の問題を全て個別に研究する必要がなくなる。辺の付加・削除によりグラフ全体への程度の影響が及ぶかなどに注目して研究を行なう。

4. 研究成果

(1) 比較可能グラフから高々 k 本の辺を除去して得られるグラフの族である、比較可能 $-k_e$ グラフについて、その計算困難性と多項式時間計算可能となる条件等を明らかにした。比較可能 -1_e グラフに対しては多項式時間で頂点彩色問題を解けることが既に示されていたが、本研究では $k \geq 2$ のとき NP 完全となることを証明した。さらに、比較可能 $-k_e$ グラフの頂点彩色において、その計算複雑さが、対応する比較可能グラフのハッセ図上の最大独立辺集合のサイズに依存することを明らかにした。具体的には、独立辺集合のサイズが $\log n^{O(1)}/k$ であるとき $f(k)n^{O(1)}$ 時間で解くことができることを示し、その一方、独立辺集合のサイズが $\log n^{\omega(1)}/k$ の場合には exponential time hypothesis の仮定のもとでは $f(k)n^{O(1)}$ 時間で解くことができないことを証明した。これらの結果はパラメータ化比較可能グラフの頂点彩色問題について、研究代表者らが従来行った研究で未解決であった部分を解決したものである。また、問題の困難性がグラフのどのような特徴と関連するかを明らかにした点では、ほかにあまり例のないものであると考える。

パラメータ化グラフの頂点彩色問題については、置換グラフに辺を追加・削除した置換 $+k_e, -k_e$ グラフの頂点彩色問題についても研究を行った。置換 $-k_e$ グラフの頂点彩色問題に対する $O(2^k(k^2+n^2))$ 時間アルゴリズムを示し、fixed parameter tractable となることを明らかにした。置換 $+k_e$ グラフに対しては $k = 1$ のとき多項式時間で解けることを示した。主要なグラフ族のパラメータ化グラフの中で複雑さが明らかにされていなかったものについて一部結果を得られたが、未解決の部分について研究を進める必要がある。

(2) $F+k_1e-k_2e$ グラフとは、 F グラフに高々 k_1 本の辺を追加し、 k_2 本の辺を除去して得られるグラフである。このようなグラフ上の問題に対し、問題とグラフ族が特定の性質を満たす場合に、パラメータ k_1, k_2 に対して fixed-parameter tractable となることを、具体的なアルゴリズムの設計手法を示すことにより明らかにした。これらの手法は、 t 値頂点問題と名づけた、グラフの各頂点に t 種類の値のいずれかを与えることにより解を表現できる問題を対象とする。第一の手法では、 F グラフ上のある頂点集合 W に対しあらかじめ値が与えられた場合に、ある問題が W のサイズに対して fixed-parameter tractable であるとき、 $F+k_1e-k_2e$ グラフ上の同じ問題が fixed-parameter tractable となることを示した。第二の手法では、付加した辺、除去した辺を元に戻す操作を考え、これらの操作について閉じており、かつ問題を多項式時間で

解くことのできるグラフ族 F に対しては、 $F+k_1e-k_2e$ グラフ上の問題が fixed-parameter tractable となることを示した。また、これらの手法の適用例として、最大クリーク問題、頂点被覆問題に対するアルゴリズムを示した。特定の問題に限定せず、特定の性質を持つ問題（とグラフ族の性質の組合せ）に対して効率的なアルゴリズムの設計が可能であることを示した点で、従来にない結果である。これらの結果の拡張、実際のアルゴリズム設計への応用など興味深い発展が期待できる。

(3) パラメータ化グラフ上の頂点彩色問題と関連の深い、一部の頂点に対してあらかじめ彩色が与えられた場合の頂点彩色問題である precoloring extension 問題について研究を行い、また、いくつかのパラメータ化グラフにおける基本的問題のアルゴリズムについて研究を行った。Precoloring extension 問題については、正方格子状のグラフの部分グラフであるグリッドグラフについて研究を行なった。グリッドグラフは最大次数が 4 となるため、彩色数が 5 以上の場合は必ず彩色可能であることが明らかである。我々は、彩色数が 4 の場合について、彩色可能か否かを判定し、彩色可能な場合にはその彩色を与える多項式時間アルゴリズムを示した。また、彩色数が 3 の場合にはこの問題が NP 完全となることを証明した。Precoloring extension 問題とパラメータ化グラフ上の頂点彩色問題の関連について、 F グラフに辺の追加・削除を行って得られるパラメータ化グラフにおいて、それらの辺の端点をあらかじめ彩色の与えられた頂点に対応させることにより、 F グラフの precoloring extension 問題が多項式時間で解ければパラメータ化グラフの頂点彩色問題が fixed parameter tractable となる関係を持つことを示した。

(4) 頂点彩色以外の問題として、グラフ同型性判定問題、最大独立点集合問題について、パラメータ化グラフ上のアルゴリズムの研究を行った。グラフ同型性判定問題に関しては、木 $+k_e$ グラフの同型性判定を行う $O((2k-2)!n)$ 時間アルゴリズムを提案し、fixed parameter tractable となることを示した。木 $+k_e$ グラフは feedback vertex set のサイズが k のグラフに含まれるため fixed parameter tractable となることは知られているが、限られたグラフに対してはそれより高速に解くことができることを明らかにした。他のグラフ族のパラメータ化グラフについても、今後より興味深い結果が得られることが期待できる。

また、二部グラフに辺の追加を行なったグラフおよび、弦グラフに辺の追加と削除を行なったパラメータ化グラフ上での最大独立点集合問題が fixed parameter tractable となることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 5 件)

- ① 岩永耕平、武永康彦、パラメータ化グラフに対する Fixed-Parameter アルゴリズムの設計手法、電子情報通信学会総合大会、p. ISS-P-307、2010 年 3 月 18 日、東北大学.
- ② Yasuhiko Takenaga and Akihiro Yamada, Precoloring Extension on Grid Graphs, The China-Japan Joint Conference on Computation Geometry, Graphs and Applications, 2010 年 11 月 4 日、大連海事大学.
- ③ 斉藤惇、武永康彦、比較可能 k グラフの頂点彩色問題のパラメータ化計算量、電子情報通信学会コンピュテーション研究会技術研究報告、pp. 31-38、2012 年 3 月 16 日、東京大学.
- ④ 小寺諒、武永康彦、パラメータ化 permutation グラフの頂点彩色問題、電子情報通信学会総合大会、p. ISS-P-211、2012 年 3 月 21 日、岡山大学.
- ⑤ 上野豊、武永康彦、木 k グラフの同型性判定問題、電子情報通信学会総合大会、p. ISS-P-212、2012 年 3 月 21 日、岡山大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

武永康彦 (TAKENAGA YASUHIKO)
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・
准教授
研究者番号：20236491

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし