

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21500017

研究課題名（和文） ネットワークの耐故障性に関するグラフ構造的性質の解明と改善アルゴリズムの設計

研究課題名（英文） Studies of Graph-Structural Properties on Fault-Tolerance of Networks and Design of Improved Algorithms.

研究代表者

蓮沼 徹 (HASUNUMA TORU)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授

研究者番号：30313406

研究成果の概要（和文）：

- (1) 2 連結グラフのデカルト積には 2 本の完全独立全域木が存在することを証明した。また、反復ラインダイグラフの (h,k) -支配数を決定した。
- (2) 耐故障ゴシップグラフの最小サイズの上下界を改善した。
- (3) 木の $L(2,1)$ -ラベリング数を計算する線形時間アルゴリズムを設計した。また、木の (p,q) -全ラベリング数のタイトな上下界, 最大次数が 3 と 4 のときの外平面グラフの $(2,1)$ -全ラベリング数のタイトな上界を与えた。
- (4) 極大外平面グラフのキューナンバーを計算する線形時間アルゴリズムを設計した。

研究成果の概要（英文）：

- (1) We show that there are two completely independent spanning trees in the Cartesian product of 2-connected graphs. Also, we determine the (h,k) -domination number of an iterated line digraph.
- (2) We improve upper and lower bounds on the minimum size of a fault-tolerant gossip graph.
- (3) We design a linear time algorithm for computing the $L(2,1)$ -labeling number of a tree. Besides, we present tight upper and lower bounds on the (p,q) -total labeling number of a tree and a tight upper bound on the $(2,1)$ -total labeling number of an outerplanar graph.
- (4) We design a linear time algorithm for computing the queue-number of a maximal outerplanar graph.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：グラフ理論，アルゴリズム論

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：グラフ，ネットワーク，アルゴリズム，耐故障性。

1. 研究開始当初の背景

ネットワークシステムの大規模化により，その構成要素の故障の存在を完全に無くすこ

とは非常に困難である。一方，現代社会におけるネットワークシステムへの依存度はますます高まっており，システムの故障は社会的にも影響は大きく，人々の日常生活に重大

な支障をきたす恐れがある。従って、システムの構成要素に故障があったとしても、システム全体としては問題なく機能するように設計することは基本的かつ重要である。

ネットワークシステムはグラフと呼ばれる概念によりモデル化することができ、ネットワークシステム上の種々の問題は、グラフ構造的性質として抽象化して捉えることができる。そこで、本研究では、ネットワークの耐故障性に関するグラフ構造的性質の解明および、グラフ構造的性質に関するアルゴリズムの開発あるいはアルゴリズムの改善について考察を行う。

ネットワークの耐故障性を考慮したグラフ構造的性質としては様々なものがあるが、本研究では特に、完全独立全域木、耐故障ゴシップグラフ、 $L(2,1)$ -ラベリング、キューレイアウトおよびこれらに関連するグラフ構造的性質に焦点を絞って考察する。また、これらの構造的性質を調べる対象は、主に平面グラフ、超並列計算機の相互結合網に関連するグラフクラスとする。

(1) 完全独立全域木 :

T_1, T_2, \dots, T_k をグラフ G の全域木とする。 G の任意の二頂点 u, v に対して T_1, T_2, \dots, T_k における、 k 本の u と v の間のパスが u, v 以外の頂点を互いに共有しないとき、 T_1, T_2, \dots, T_k は G の完全独立全域木であるという。グラフの完全独立全域木は、ネットワークにおける耐故障性を考慮した情報散布 (broadcasting) 問題に応用をもつことが知られている。完全独立全域木概念の研究代表者により導入されたもので [Completely independent spanning trees in the underlying graph of a line digraph, *Discrete Mathematics* 234 (2001) 149-157], これまでに、 k 点連結ラインダイグラフの底グラフに k 本、4 点連結極大平面グラフに 2 本の完全独立全域木が存在すること、与えられたグラフに完全独立全域木が 2 本存在するかどうかの判定問題は NP 完全であることが示されている。しかしながら、完全独立全域木について調べられているグラフクラスの数是非常に少ない。

(2) 耐故障ゴシップグラフ :

G を各辺に異なる整数値が割り当てられた多重グラフとする。 G の任意の二頂点の順序対 (u, v) に対して、 u から v に k 本の互いに辺を共有しない、辺のラベルが単調増加のパスが存在するとき、 G を k -耐故障ゴシップグラフという。 k -耐故障ゴシップグラフは、耐故障性を考慮したゴossiping (gossiping) 問題に応用をもつことが知られており、 k -耐故障ゴシップグラフの辺の最小本数 (最小サイズ) を求めることが重要となる。これまでに、

Berman, Hawrylycz [Telephone problems with failures, *SIAM J. Alg. Dis. Meth.* 7 (1986) 13-17] により、最小サイズの上界と下界が与えられたが、最小サイズの決定は未解決である。ほとんどの k で最良な上界としては、Haddad, Roy, Schaffer [On gossiping with faulty telephone lines, *SIAM J. Alg. Disc. Meth.* 8 (1987) 439-445] による $nk/2 + O(k\sqrt{n} + n \log n)$ であるが、最近 k が十分大きいときの改善として、Hou, Shigeno [New bounds on the minimum number of calls in failure-tolerant gossiping, *Networks*, in press.] により $nk/2 + n(n-1)/2$ が示されている (ここで n は頂点数である)。ゴossiping は通信問題としては情報散布と並んで非常に基本的なものである。しかしながら、1987 年の Haddad, Roy, Schaffer の結果から 20 年以上経っているにも関わらず、 k が十分大きいときを除いて、彼らの結果は改善されていない。

(3) $L(2,1)$ -ラベリング :

グラフ G の k - $L(2,1)$ -ラベリングとは、 G の頂点への 0 から k までの非負整数のラベル付けで、隣接している頂点のラベルの差は 2 以上、距離が 2 の頂点のラベルの差は 1 以上という条件が付いている。 $L(2,1)$ -ラベリングは、通信障害に対する耐故障性を考慮した周波数割り当て問題に応用をもっており、近年欧米を中心に盛んに研究が行われている。グラフ G に対して、 k - $L(2,1)$ -ラベリング可能な k の最小数を G の $L(2,1)$ -ラベリング数という。この数を計算する問題は多くのグラフクラスで NP 困難であることが報告されており、多項式時間で解けることが知られているクラスは少ないが、その中で代表的なものとして木が挙げられる。木の $L(2,1)$ -ラベリング数を線形時間で計算できるかどうかは未解決問題となっている。

(4) キューレイアウト :

グラフのキューレイアウトは頂点の線形順序と、辺のキューへの割当て、ただし同一キューに割当てられた辺は入れ子にならない ($u < x < y < v$ のとき辺 uv, xy は入れ子であるという) により定義される。このレイアウトは耐故障性を考慮した超並列計算機的设计手法 [A.L. Rosenberg, The DIOGENES approach to testable fault-tolerant array of processors, *IEEE Trans. Comput.* C-32 (1983) 902-920] に応用をもつことが知られている。この概念の双対ともいえるスタックレイアウトは本型埋め込みともよばれ、これまでに数多くの研究がなされている。本型埋め込みに比べると、キューレイアウトに関する研究は少なめだが、近年、キューレイアウトのグラフ描画への応用が示されたあたり

から、盛んに研究され始めている。キューレイアウトに関する最大の未解決問題は、平面グラフのキューナンバー（キューレイアウトに必要なキューの最小数）が頂点数に無関係な定数で抑えられるかという問題である。

2. 研究の目的

(1) 完全独立全域木については、主に相互結合網のクラスを対象として、その存在と構成法について考察する。

(2) k -耐故障ゴシップグラフの最小サイズについては、Haddad, Roy, Schaffer の上界の改善を目指す。具体的には $nk/2+O(n\log n)$ を予想しており、この証明を試みる。

(3) $L(2,1)$ -ラベリングについては、木の $L(2,1)$ -ラベリング数を計算する線形時間アルゴリズムの設計、平面グラフの $L(2,1)$ -ラベリング数の上界の改善を試みる。

(4) キューレイアウトについては、平面グラフのキューナンバーが頂点数とは無関係の定数で抑えられるかという未解決問題の解決を目指す。

3. 研究の方法

本研究では、4つのグラフ構造的性質、完全独立全域木、耐故障ゴシップグラフ、 $L(2,1)$ -ラベリング、キューレイアウトについて、主に平面グラフ、相互結合網のクラスを対象とし、組合せ論、グラフ理論、アルゴリズム論、計算論における様々な手法を駆使しながら、考察を進める。適宜、適切な概念等を導入し、研究対象に関係すると思われる命題の予想、証明を地道に積み上げて考察を進め、研究目的の達成を目指す。

4. 研究成果

(1) 完全独立全域木および関連概念の結果

① 2次元トーラスネットワークに2本の完全独立全域木が存在することを構成的に証明した。さらにこの結果をグラフのデカルト積の観点から一般化することを試み、単サイクルグラフとサイクルのデカルト積における2本の完全独立全域木の存在、任意の2連結グラフのデカルト積における2本の完全独立全域木の存在をそれぞれ構成的に証明することができた。本結果は Networks と呼ばれる国際雑誌に採録され現在印刷中である。完全独立全域木に関する研究はいまだ多くないが、最近 $2k$ -連結グラフに k 本の完全独立全域木が存在するという予想と他の概念

の予想との関連性や、予想自体の反例が報告されており、完全独立全域木の概念は徐々に広まりつつあると思われる。このような状況において、トーラスネットワークという非常によく知られた相互結合網における完全独立全域木の存在・構成法に関する本研究結果は、重要な結果の一つであると考えられる。ある条件を付けた場合（例えば平面性など）に、完全独立全域木の予想が成り立つかどうかの考察を今後の課題として挙げるができる。

② 完全独立全域木は、互いに共通要素をもたない複数の連結支配集合と見做すことができ、連結支配集合という概念と関連している。連結支配集合は耐故障性を考慮したネットワーク上の資源配置問題や無線通信ネットワークのバックボーンに応用をもつことが知られている。連結支配集合をより一般化した (h, k) -支配集合という概念を導入し、反復ラインダイグラフの (h, k) 支配集合の最小濃度（ (h, k) -支配数）を決定した。この結果は相互結合網として知られている、de Bruijn 及び Kautz ダイグラフの連結 k -支配集合の既知の結果および一般化 de Bruijn ダイグラフの支配集合の結果を一般化している。支配集合に関する結果のほとんどは最小濃度の上下界に関するものであるが、本研究では最小濃度の値の決定ということで、結果自体のインパクトはある程度あったのではないかと思われる。本結果は、Discrete Applied Mathematics と呼ばれる国際雑誌に掲載された。

(2) 耐故障ゴシップグラフの結果

Haddad, Roy, Schaffer の辺素なラベル増加パスの構成法をより精密に解析することにより、彼らの耐故障ゴシップグラフの最小サイズの上界（頂点数が2のべき乗のとき及び一般の場合の両方）を改善することができた。また、recursive circulant と呼ばれるグラフに類似したグラフの構造的性質を調べることにより、Hou and Shigeno の上界も改善することができた。さらに、Berman and Paul の情報散布数の結果を利用することにより、Hou and Shigeno の下界を頂点数 n が5以上のときに、Berman and Paul の下界を k (故障回数の上限) が $n/2$ よりも大きいときに、それぞれ改善する下界を示すことができた。特に、Haddad, Roy, Schaffer の上界の改善は20数年ぶりであり、インパクトは小さくないと思われる。本結果は、WG2011 と略称される国際会議で発表した。上下界のさらなる改善、最小サイズの決定が今後の課題である。

※ 本研究(2)は、他大学の研究者との共同研究である(雑誌論文参照)

(3) L(2,1)-ラベリングおよび関連概念の結果

① L(2,1)-ラベリングでは、木の L(2,1)-ラベリング数を計算する線形時間アルゴリズムを設計することができた。木の L(2,1)-ラベリング数を計算する線形時間アルゴリズムの設計は、この分野ではよく知られた未解決問題であった。従って、インパクトは高いのではないかと思われる。

本結果は、Algorithmica と呼ばれる国際雑誌で採録され現在印刷中である。本アルゴリズムはやや複雑であり、よりシンプルなアルゴリズムの設計が今後の課題である。

② (p,q)-全ラベリングは L(p,q)-ラベリングに類似した概念であり、木の (p,q)-全ラベリング数のタイトな上下界を与えた。

本結果は、Discrete Mathematics と呼ばれる国際雑誌に掲載された。

③ 最大次数 Δ が 3 と 4 のときの外平面グラフの (2,1)-全ラベリング数が高々 $\Delta+2$ であることを示した。本結果は、Journal of Discrete Algorithms と呼ばれる国際雑誌に掲載された。

※ 本研究(3)は、他大学の 3 名の研究者との共同研究である(雑誌論文参照)

(4) キューレイアウトの結果

平面グラフのキューナンバーが定数で抑えられるかという未解決問題を結局解くことは今回出来なかった。若干、視点を変え、極大外平面グラフという、平面グラフの部分クラスに限定した場合について考察し、この場合にはキューナンバーの計算が線形時間で可能であることを示した。すなわち、極大外平面グラフのキューナンバーを計算する線形時間アルゴリズムを設計した。これまでにグラフクラスに対するキューナンバーを計算する多項式時間アルゴリズムは著者の知る限り示されておらず、極大外平面グラフという制約の強いクラスではあるが、線形時間でキューナンバーが計算できるということを示したことは、意義のあることと考えられる。また、本研究で設計した線形時間アルゴリズムの中心となる部分は、有限オートマトンで記述でき非常にシンプルである。本結果は、Euro2012 と略称される国際会議で発表した。極大という条件を除いた場合の考察、すなわち、外平面グラフのキューナンバーを計算する多項式時間アルゴリズムを設計で

きるかどうかの考察が今後の課題である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① Hasunuma T., Morisaka C., Completely independent spanning trees in torus networks, Networks, 査読有, 印刷中, DOI:10.1002/net.20460

② Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., A linear time algorithm for L(2,1)-labeling of trees, Algorithmica, 査読有, 印刷中, DOI:10.1007/s00453-012-9657-z

③ Hasunuma T., Otani M., On the (h,k)-domination numbers of iterated line digraphs, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 160, 2012, pp. 1859-1863, DOI:10.1016/j.dam.2012.03.024

④ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., A tight upper bound on the (2,1)-total labeling number of outerplanar graphs, Journal of Discrete Algorithms, 査読有, Vol. 14, 2012, pp. 189-206, DOI:10.1016/j.jda.2011.12.020

⑤ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., The (p,q)-total labeling problem for trees, Discrete Mathematics, 査読有, Vol. 312, 2012, pp. 1407-1420, DOI:10.1016/j.disc.2012.01.007

⑥ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., An $O(n^{1.75})$ algorithm for L(2,1)-labeling of trees, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 410, 2009, pp. 3702-3710, DOI:10.1016/j.tcs.2009.04.025

[学会発表] (計 11 件)

① Hasunuma T., Haruna A., A linear time algorithm for the queue-numbers of maximal outerplanar graphs, The 28th European Workshop on Computational Geometry (EuroCG 2012), 2012.3.19-21, Assisi, Italy.

② Hasunuma T., Nagamochi H., Improved bounds for minimum

fault-tolerant gossip graphs, The 37th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2011), 2011.6.21-24, Tepla, Czech Republic.

- ③ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., The (p,q)-total labeling problem for trees, The 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2010), 2010.12.15-17, Jeju Island, Korea.
- ④ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., The (2,1)-total labeling number of outerplanar graphs is at most $\Delta + 2$, The 21st International Workshop on Combinatorial Algorithms (IWCCA 2010), 2010.7.26-28, London, UK.
- ⑤ Hasunuma T., Otani M., Highly connected k-tuple twin dominating sets in iterated line digraphs, (社) 電子情報通信学会 回路とシステム研究会, 2010.3.1, ブリーズベイマリーナ (宮古島市)
- ⑥ Hasunuma T., Ishii T., Ono H., Uno Y., A linear time algorithm for L(2,1)-labeling of trees, The 17th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2009), 2009.9.7-9, Copenhagen, Denmark.

[その他]

ホームページ等

<http://pub2.db.tokushima-u.ac.jp/ERD/person/82337/work-ja.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

蓮沼 徹 (HASUNUMA TORU)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授
研究者番号 : 30313406

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者 ()

研究者番号 :