

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 26 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21500882

研究課題名(和文) 数学の概念理解を促進するeラーニング教材の開発と長期的評価についての研究

研究課題名(英文) A research on development and long-term evaluation of e-learning materials for promoting students' understanding of mathematical concepts

研究代表者

川添 充 (Kawazoe, Mitsuru)

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号：10295735

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円、(間接経費) 690,000円

研究成果の概要(和文)：大学初年次での数学学習で多くの学生が「つまづく線形代数」について、大学生の数学概念理解の「つまづき箇所とその原因」の調査・分析を行い、概念理解を促進するためのeラーニング教材の開発を行った。開発したeラーニング教材が長期的な概念理解の定着に効果があるかどうかを調査した結果、掃き出し法による連立一次方程式の解法「の概念理解と定着」には効果が見られた。抽象ベクトル空間の基底と次元の概念理解を促進するには至らなかったが、抽象ベクトル空間での概念理解を促進するためには、その理解の基盤となる空間ベクトルや集合の表象の獲得促進が必要であるとの示唆を得た。

研究成果の概要(英文)：We analyzed students' errors in understanding mathematical concepts in linear algebra and developed e-learning materials to promote students' understanding of mathematical concepts in linear algebra. The result of a long-term evaluation showed that the materials promoted students' conceptual understanding of Gaussian elimination for solving systems of linear equations. On the other hand, students' understanding of basis and dimension of formal vector spaces was not promoted. The qualitative analysis of students' answers indicated that for promoting students' understanding of formal vector spaces, it is important to develop students' mental representations on geometrical vectors and sets.

研究分野：数学教育

科研費の分科・細目：科学教育・教育工学・科学教育

キーワード：eラーニング 数学教育 高等教育

1. 研究開始当初の背景

OECDの高等教育における学習成果の評価実施(AHELO)に向けた動きからもわかるように,大学での学習の質が国際的に評価される時代が来ようとしている.このような流れの中で,大学での数学教育においても,学力を着実に定着させる教育方法の開発が急務である.そのためには,従来の教授法を見直し,概念理解に基づいた習得を目指した教授法・到達度評価法の開発が必要であるが,高等数学の教育を対象とした従来の研究のほとんどは実践経験に基づく教授法や教材の工夫にとどまっているといえる.とくに,数学の概念理解を促進するためには能動的学習が不可欠であり,eラーニングは受動的になりがちな講義を補完する自主学習環境として大いにその効果が期待されている.しかし,既存のシステムはドリル形式の問題集を移植したものがほとんどである.このため,数学概念理解を支援するeラーニング教材の開発研究が急務である.そこで,大学初年次の学生の数学概念理解のつまずき箇所とその原因を認知心理学的手法で調査解明し,その知見にもとづいて,数学概念理解を促進する教授法やeラーニング教材の開発を行うことを目標とした.

本研究で単なる教授法の開発にとどまらず,eラーニング教材の開発までを目標としたのは,概念理解に基づく計算手続き習得のためには,学習者自らが計算の各段階で実行中の計算の意味を理解できるような補助ツールが必要であり,我々がこれまで開発してきた数式処理と連動した数学教材の仕組みを利用すれば,学習者が自らの考えにもとづいて計算を実行する過程において,実行した計算の意味の理解を支援する情報提示を動的に行えるツールの作成が可能であると考えたからである.

2. 研究の目的

大学初年次の数学でとくに習得が難しい線形代数の学習に焦点をあて,大学初年次の学生の数学概念理解のつまずき箇所とその原因の調査解明,認知モデルに基づいた概念理解を促進する教授法の開発,開発した教授法に基づいたeラーニング教

材の開発実装,教材を用いた教育実践と教育効果の長期的測定,の4つの研究を通して,概念理解に基づく計算手続き習得のための教授法の開発とそれにもとづくeラーニング教材の開発・評価を行うことが本研究の目的である.

3. 研究の方法

(1) 大学初年次の学生の数学概念理解のつまずき箇所とその原因の調査解明のためのデータ収集:大学初年次の学生の数学概念理解のつまずき箇所や,計算手続きが正しく習得できない学生の誤り原因の分析とその原因の調査解明にとりくむために,線形代数の1年間の授業で学ぶ多数の概念の理解度を測る特別の調査用試験を単元毎に作成,4月はじめの学力測定(プレテスト)とともに,平成21年度と22年度の2年間に渡って調査を実施してデータを蓄積した.

(2) 認知心理学的手法による分析と概念理解を促進する教授法と評価法の開発:調査データの分析には認知心理学的手法を用い,各概念や計算手続きの理解度間の関係をクラスター分析やMcNemar検定などを用いて分析することで,各単元で学ぶ概念や計算手続きについての理解過程の分析を行った.これらの分析結果に基づいて,数学的概念理解およびそれに基づいた計算手続きの習得を効果的に行える教授法や評価方法を検討した.

(3) eラーニング教材の設計と開発:eラーニング教材の設計・開発においては,(2)で開発した教授法に基づいて,数式処理システムと連動する教材として作成した.教材の作成にはMathematicaおよびwebMathematicaを用いた.eラーニング教材は,学習者が計算の各段階を逐次実行できる環境に,計算の各段階での操作がどのような数学的意味をもつのかを,対応する方程式や3次元グラフィクスの表示を通して動的に提示する画面が備わったものとして教材画面を構成した.教材はWebベースとし,標準的なブラウザのみで動作するものとして作成した.また,学習者に必要とされる操作はキーボードからの数値入力とマウス操作に限定した.

(4) 線形代数の1年間のコースの設計と実施:e

ラーニング教材を組み込んだ通年(前期+後期)のコースを設計・実施。コースの設計にあたって、eラーニング教材は、授業においては教員による例示ツールとして、授業時間外には学生による自主学習ツールとして使用する形で組み込んだ。各単元ごとに理解度を測る評価テストと、長期的な定着度に関するテストを実施して、教育効果を検証するためのデータを収集した。

(5) 効果の分析と検証, 改良, 全体のまとめ: 実施したコースと教材の効果を, 教材のログとテスト結果を分析することにより検証した。検証結果に基づき, 十分な効果が得られなかった教授法や教材について, 原因を分析するとともに, 教授法・教材の改良を行った。

4. 研究成果

(1) 線形代数における概念の理解過程とつまずき箇所について:

1. 平成 21 年度と平成 22 年度の 2 年間にわたり, 大学 1 年次対象の線形代数の授業において, 年度初めのプレテストおよび, 連立一次方程式の掃き出し法による解法, 行列のランクの計算, 逆行列の計算, 行列式の計算, 部分空間の次元と基底の計算, 1 次写像の像・核の次元と基底の計算, 直交補空間の次元と基底の計算, グラム・シュミットの直交化法, 固有値・固有ベクトルの計算, 行列の対角化など主要単元での理解度を測定するための調査試験を開発して, 年間で計 16 回実施し, 40 項目についての理解度に関する調査データを得た。得られたデータ数は平成 21 年度が 154 名分(2 クラスの合計), 平成 22 年度は 81 名分(1 クラス)であった。平成 21 年度のデータのうち, 全 16 回の調査試験を一度も欠席しなかった 77 個のデータについて, クラスタ分析を用いて正誤データが似通った被験者同士のクラスタリングを行うとともに, 問題間の論理的な関連性に対して, 実際に正答・誤答の関連性があるかを McNemar 検定を用いて検定した。クラスタ分析では, 被験者は 4 つのカテゴリに分けられることがわかった。また, McNemar 検定を用いて, 論理的な依存関係をもつ項目間に正答・誤答に関して関連性があるかどうかを検定

することで, 正答・誤答に関して関連性をもつ項目を繋いで得られる特徴的なパスを複数発見した。さらに, 2 年間での合計 235 名のデータのうち全 16 回の調査試験を一度も欠席しなかった 118 個のデータに対して, 調査問題 43 問のそれぞれに対する分析対象者 118 名の正誤パターン(正解 1, 不正解 0)のデータとしての, 43 行×118 列のデータをクラスタ分析のローデータとしてクラスタ分析を行った。その結果, 43 問の問題は, 2 つのクラスに大きくわかれ, さらにそれぞれが 4 つずつのサブクラスに分かれることが見出された。これらのクラスを詳細に分析することで, 以下のような教育上の示唆が得られた。一般に, 多項式空間はベクトル空間としての抽象度が高く, その習得難易度において数ベクトル空間と大きな差があると考えられているが, グラム・シュミットの直交化法については, 数ベクトル空間と多項式空間とで習得難易度に差はなく, 数ベクトル空間での理解習得が多項式空間での理解習得につながっている。部分空間の次元や基底を求める問題や対角化の実行のような抽象概念の理解が必要な計算手続きに関する問題については, 概念理解のつまずきが計算手続きの習得を困難にしている。掃き出し法による計算や行列式の計算においては, 計算問題の正答率の高さに比べ概念理解が低く, 暗記に頼っている学習者が多い。

2. 個々の問題ごとの誤り内容について, より詳細な分析を行い, つまずき原因とそれを改善するための教授方法に関する仮説の構築と実験による検証をおこなった。つまずき原因の究明のため, 22 年度までのテスト結果のデータに加え, 大学全体で 1 年次の数学科目に導入している Web 数学学習システムの線形代数分野の問題のログデータを用いて誤り内容の分析を行った。その結果, 1 年次の線形代数全体の理解度の関わるポイントとして, 係数が 0 になっていて見かけ上消えている変数を含む 1 次方程式の場合も含めて, 方程式とその解の集合との対応の正確な理解が重要であり, そのためには, 3 次元空間において, 一部の係数が 0 になっていて見かけ上 2 変数以下となっている 1 次方程式と方程式が表す空間内の図形との対応

の理解を支援することが重要である，という仮説を立てるに至った。

3. 線形代数の概念理解の促進のために，手続きの意味や概念を幾何的にとらえられる教材やそれらを用いた指導が有効に機能するためには，学習者がある程度空間ベクトルに対する幾何的表象や空間の集合的記述に関する表象をもっていることが前提条件として必要になると考えられる。この点について，これらの表象を測った調査試験の結果を分析して検討した。その結果，一部の学習者について空間内の4本のベクトルの生成する空間と生成空間としての集合的記述に関する表象に問題があることが判明した。このことから，概念や手続きを幾何的イメージを用いた指導方法の検討にあたっては，学習者のもつ数学的表象を十分に把握すること，必要な表象が身に付いていなければ，それを身につける指導方法や教材から検討することが重要であることが示唆された。

(2) 線形代数の概念理解を支援するeラーニング教材について：開発した主な教材を以下に示す。

1. 3次元空間における1次方程式と方程式が表す空間内の図形との対応の理解を支援する教材として， $x + y = 0$ のような1次方程式の表す図形が，どの変数の空間で考えるか(xy 平面なのか xyz 空間なのか)によって変わることを観察できる教材を作成した。この教材は，一部の係数が0になっていて見かけ上2変数以下となっている退化した1次方程式について，係数が0になって方程式に現れない未知数が自由な値をとれるパラメータになることを理解させることを目的とした教材である。

2. 連立1次方程式の行列表現と掃き出し法による解法の理解を支援する教材として，拡大係数行列に対する基本変形が連立1次方程式のどのような変形操作に対応するかを観察できる教材を作成した。この教材は，連立1次方程式の変形操作が拡大係数行列の行に関する基本変形に対応することについての理解を深めるための教材である。

3. 3元不定連立1次方程式について，方程式系の方程式1つずつに対応する平面を選択的に空間内に表示し，交わりの集合を図とパラメータ表示で示して，連立1次方程式の解に現れるパラメータ

の個数を幾何的にとらえることのできる教材を作成した。この教材は，解の意味やパラメータ表示及びパラメータの個数の意味を理解させることを目的とした教材である。

4. 2次行列の成分を自由に設定できる1次変換に対して， xy 平面内をマウスで自由に動かせるベクトルとその1次変換による像を表示させて固有ベクトルの幾何学的な意味を理解させる教材を作成した。この教材は，固有ベクトルを1次変換で方向がずれずに伸び縮みするだけのベクトルとしてイメージできるようにすることを目的とした教材である。

(3) 教育効果に関する検証について：解不定の連立1次方程式の解のパラメータ表示が抽象ベクトル空間の各種部分空間の基底や次元を求める手続きと深く関係し，1年間を通じて重要なツールとなるため，解不定の連立1次方程式の解のパラメータ表示の理解促進が1年間の線形代数の概念理解を支援するとの仮説のもと，教育効果を検証する実験を平成24年度に行った。前項(2)の1と2の教材をWeb数学学習システムに実装して公開し，前期に取り扱う連立1次方程式の掃き出し法による解法を学習した後に自宅学習用として使用させ，翌半期の授業冒頭で連立1次方程式の解法手続きの理解度を調査試験により調査するとともに，後期の抽象ベクトル空間での各概念の理解度との関連を該当する単元での調査試験により調べた。連立1次方程式の解法手続きの理解度との関連について，教材を使用しなかった学習者の答案には概念的なミスがみられたが，2つとも使用した学習者の答案には，単純な計算ミスは見られたものの，概念的なミスは見られなかった。このことから，これらの教材が連立1次方程式の解法手続きの理解の長期的定着を支援していると考えられる。一方，とくに(2)-1の教材については，抽象ベクトル空間の重要な部分空間(有限個のベクトルで生成される部分空間，1次写像の核・像)の概念理解に向けた空間イメージの獲得にもつながると期待したが，平成24年度の実践では，抽象ベクトル空間での部分空間の概念理解を促進するには至らなかった。この結果については，(1)-3の結果が示すよう

に,3本以上の空間ベクトルが生成する空間についての幾何的表象や,無限集合の集合的記法に対する表象が十分でないことがその原因として考えられる.抽象ベクトル空間の概念理解の促進のためには,無限集合の理解促進,空間ベクトルやそれらの集まりである部分空間の表象の獲得促進が必要であると考えられ,今後,学習者のもっているベクトルや集合に関する表象をさらに詳しく調査し,各学習段階における学習者の数学的表象の発達段階に合わせた指導方法や教材を検討する必要がある.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計7件)

- ① M. Kawazoe, M. OKamoto, T. Takahashi, Students' mental representations of geometric vectors and sets related to linear algebra, Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (掲載決定), 2014, 査読有.
- ② M. Kawazoe, T. Takahashi, K. Yoshitomi, Web-based system for after-class learning in college mathematics via computer algebra system, Proceedings of the 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Vol.2, 2013, pp. 476-485, 査読有.
- ③ 川添充, 吉富賢太郎, 線形代数における誤答パターンの分類とeラーニングへの応用, 第44回数学教育論文発表会論文集, 2011, pp. 375-380, 査読有.
- ④ 川添充, 岡本真彦, 高橋哲也, 線形代数の教授内容の関連性と指導のポイントに関する考察, 2011年度日本認知科学会第28回大会発表論文集, 2011, pp. 328-334, 査読有. http://www.jcss.gr.jp/meetings/JCSS2011/proceedings/pdf/JCSS2011_P1-35.pdf
- ⑤ 川添充, 岡本真彦, 高橋哲也, 大学初年次線形代数の理解パターンの分析, 第43回数学教育

論文発表会論文集, 2010, pp. 807-812, 査読有.

[学会発表] (計10件)

- ① M. Kawazoe, M. OKamoto, T. Takahashi, Students' mental representations of geometric vectors and sets related to linear algebra, The 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME38, 2014年7月15日~7月20日開催), (発表決定, 発表日未定), University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- ② M. Kawazoe, T. Takahashi, K. Yoshitomi, Web-based system for after-class learning in college mathematics via computer algebra system, The 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education (EARCOME6), 2013年3月21日, Prince of Songkla University, Phuket, Thailand.
- ③ 川添充, 吉富賢太郎, 線形代数における誤答パターンの分類とeラーニングへの応用, 第44回数学教育論文発表会, 2011年11月12日, 上越教育大学.
- ④ 川添充, 岡本真彦, 高橋哲也, 線形代数の教授内容の関連性と指導のポイントに関する考察, 2011年度日本認知科学会第28回大会, 2011年9月22日, 東京大学.
- ⑤ 川添充, 岡本真彦, 高橋哲也, 大学初年次線形代数の理解パターンの分析, 第43回数学教育論文発表会, 2010年11月13日, 宮崎大学
- ⑥ 川添充, 高橋哲也, 吉富賢太郎, 授業時間外学習のための数学eラーニング・システムの構築とその効果, 日本リメディアル教育学会第6回全国大会, 2010年8月30日, 湘南工科大学

- ⑦ 川添充, 高橋哲也, 吉富賢太郎, webMathematica を用いた Web 数学学習システムの構築, 日本数学教育学会算数数学教育全国大会, 2010 年 8 月 2 日, 新潟朱鷺メッセ.
- ⑧ M. Kawazoe, T. Takahashi, K. Yoshitomi, Web-based learning system for college mathematics powered by a computer algebra system, 日本リメディアル教育学会九州沖縄支部大会 ITK-FUKUOKA2009 合同講演会, 2009 年 11 月 6 日, 福岡大学.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権] (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.las.osakafu-u.ac.jp/>

[lecture/math/MathOnWeb/](http://www.las.osakafu-u.ac.jp/lecture/math/MathOnWeb/)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川添 充 (KAWAZOE, Mitsuru)

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号: 10295735

(2) 研究分担者

岡本 真彦 (OKAMOTO, Masahiko)

大阪府立大学・人間社会学部・教授

研究者番号: 40254445

高橋 哲也 (TAKAHASHI, Tetsuya)

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号: 20212011