様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　　5月　28　日現在

機関番号：12701
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：　2009～　2011
課題番号：21530195
研究課題名（和文）　状態空間模型における状態変数の次元の検定

研究課題名（英文）Hypothesis testing of the dimension of state variables in the state space model

研究代表者
小林 正人（ KOBAYASHI MASAHITO　）
横浜国立大学・国際社会科学研究科・教授
研究者番号60170354

研究成果の概要（和文）：観測される変数の数が二つの場合において、観測誤差の自乗が正規分布に従うという前提のもと、多変量確率的ボラティリティ（条件付き分散）模型が単一の共通変動因子を有するという仮説にたいする検定統計量を開発した。多変量確率的ボラティリティ模型を線形状態空間模型に変換することによりこの結論は導かれる。実証分析への応用として、アジア諸国の株式市場の価格指数の分析により、いくつかの市場が共通の変動因子を有する可能性が示唆されている。

研究成果の概要（英文）： The Lagrange multiplier test is proposed for the null hypothesis that the bivariate time series has the only common stochastic volatility and no idiosyncratic volatility factor. The test statistic is derived by representing the model in the linear state-space form under the assumption that the log of squared measurement error is normally distributed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2011年度	1,400,000	420,000	1,820,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：社会科学
科研費の分科・細目：経済学、経済統計学
キーワード：計量経済学

１．研究開始当初の背景

(1)多変量stochastic volatility model研究の最近の進展はめざましく、様々な模型が提案されている。しかし、ほとんどの研究の焦点は推定問題にあり、その模型間の比較・モデル選択・仮説検定にはまだ十分な進展がみられていない。とくにvolatilityの次元の決定問題についてほぼ白紙の状態といってよい。stochastic volatility modelのオリジナルなモデルは非線形状態空間モデルであるため、

尤度関数の評価などには数値積分が必要である。このため台形公式による数値積分、乱数による数値積分、Bayes推定など推定だけでも様々な技術を必要とする。数値計算が必要であることは、実証に用いることへの大きなハードルとなってきた。

(2) 多変量 stochastic volatility model は、誤差項の分布に特殊な仮定をおき、観測される変数の自乗の対数が正規分布にしたがうと仮定することにより線形状態空間モデルに帰着できることがすでに知られている。(Harvey et al. 1994, Review of Economic Studies, pp.247-264) 線形状態空間モデルに変形することにより、推定精度は若干おちるものの、推定に必要な数値計算は飛躍的に単純になることも知られており、その推定に関してはすでに十分研究しつくされている。(Asai et al., 2006, Econometric Review, pp.145-175 を参照) しかし、線形状態空間モデルの構造の構造間の比較・モデル選択・仮説検定については、線形、非線型を問わず、ほとんど手がついていないといっても過言ではない。

(3)多変量 Garch モデルと多変量 Stochastic volatility モデルに代表されるボラティリティ変動モデルは、国際金融市場の分析に重要な役割をはたしている。とくに金融危機の国際的な伝播の分析、不確実性の伝播など、近年頻発する金融危機(アジア金融危機、サブプライム問題等)の特徴として、一国での金融危機が瞬く間に国際的に伝播し、国際的な危機に拡大するというものがある。これは経済のグローバル化の必然的な帰結ではあるものの、国・地域ごとにリスクの伝播の形態、速度、継続期間は異なる。このため、これらの複雑な現象を記述し、予測するモデルの意義は大きく、その統計的分析手法が必要とされている。

２．研究の目的

(1)線形の多変量状態空間モデルにおける状態変数の次元を決定するための仮説検定の開発の第一歩として、二変量の状態空間モデルが同一の状態変数によって駆動されているかどうかの検定を行う。この検定は、観測される確率変数をトレンド部分と系列相関をもたない攪乱項に分解した上で、トレンド部分が状態空間モデルに従うとき、トレンド部分を構成する状態変数の分布の次元をしらべるものである。本研究では、仮説検定の枠組みの中で、分布の退化を帰無仮説として次元の決定をおこない、状態空間模型での仮説検定について統計的推論の確立をめざすものである。この問題は stochastic volatility への応用なくしても、それだけで重要な応用分野を有する課題である。

(2) stochastic volatility 模型は分布に特殊な想定をおくことにより線形状態空間モデルに変換できるため、多変量線形状態空間モデルでの仮説検定は多変量 stochastic volatility の構造の仮説検定にそのまま利用できる。

(3)実証分析の対象としてアジア金融危機をえらび、各国の金融市場、とくに株式市場が不確実性において相互に完全に連動しているか、それとも国ごとに独自の不確実性を有するかを統計的に検証する。このような検証をおこなうことにより、危機の伝播の経路を明らかにすることができ、さらにその防止や対策にも貢献できる。

３．研究の方法

(1)次の理由から Lagrange 乗数検定統計量を用いる。この統計量は score 検定統計量ともよばれる。対立仮説は状態変数の次元が２であり、帰無仮説のもとでの状態変数の分布の次元が１というものである。帰無仮説のもとで分布が退化することは、未知の分散パラメターの一つが０となるということであらわされる。推定される統計量が正規分布であるためには、推定される係数がパラメター空間の内点であることを必要とすることに留意すると、Wald 検定、尤度比検定は制約される係数についても推定が必要であるので、分散＝０という仮説の検定には利用不可能であり。これにたいしてラグランジュ乗数検定は制約がおかれる係数には推定をおこなわない。ラグランジュ乗数検定は、帰無仮説のもとでの未知係数の推定値だけを用いるので、帰無仮説のもとで０とおかれる分散パラメターの推定は用いないため、推量量はすべて係数空間の内点とすることができる。したがって統計量構築に用いられる推定量の分布は正規分布に漸近的に従うことが可能となる。これにより検定統計量はカイ自乗分布に漸近的に従う。

(2)退化する密度関数の評価には次の方法を用いる。 対数尤度関数を微分して帰無仮説のもとで評価したものが、Lagrange 乗数検定統計量の中核部分である。対数尤度関数は遷移方程式と観測方程式の密度関数から構成される。帰無仮説のもとでは遷移方程式が退化するため、そのままの形では対数尤度関数の微係数を帰無仮説のもとで求めることは困難である。それの一つの解決として Dirac の delta と呼ばれる次のような手法を用いる。

期待値 0、分散 σ^2 の正規分布の密度関数を $f(x,\sigma^2)$ と表し、任意の密度関数を $g(x,\sigma^2)$ とおくと、分散 σ^2 が０に限りなく近づくとき、

$$\lim \int f(x,\sigma^2) g(x) dx = g(0),$$

$$\lim \int (\partial / \partial \sigma^2) f(x,\sigma^2) g(x) dx = -g'(0),$$

という関係式が成立することを用いる。これはDirac の delta とよばれる関数が満たす関係式であり、分散０の正規分布の密度関数の微係数に利用可能であり、退化する密度関数の処理には本質的な関係式である。

(3)モデルの定式化は次のように行う。
２変量 stochastic volatility model は観測される変数 r_{1t}, r_{2t} に対して

$$r_{1t} = \psi_1 e_{1t} \exp(-0.5 h_{1t})$$

$$r_{2t} = \psi_2 e_{2t} \exp(-0.5 h_{2t})$$

と表される。

$$y_{1t} = \log(r_{1t}{}^2),\ \xi_{1t} = \log(e_{1t}^2) - E[\log(e_{1t}^2)]$$

とおくと、線形状態空間模型での観測方程式

$$y_{1t} = \delta_1 + h_{1t} + \xi_{1t},\ y_{2t} = \delta_2 + h_{2t} + \xi_{2t},$$

に変換することができる。遷移方程式

$$h_{1t} = \phi_1 h_{1t-1} + u_{1t},$$

$$h_{2t} = \phi_2 h_{2t-1} + \lambda u_{1t} + u_{2t}$$

を観測方程式とあわせると、線形状態空間模型と見なすことができる。ここでは、遷移方程式が一般の多変量自己回帰仮定ではない。このような特殊な形を用いたのは、一般的な表現のモデルを用いると帰無仮説

$$\phi_1 = \phi_2,\ \lambda = 1, Var(u_{2t}) = 0$$

のもとでは推定できない係数が出現するため、上記の特殊な形のモデルの推定と同値になるからである。

(4)帰無仮説 $\phi_1 = \phi_2,\ \lambda = 1, Var(u_{2t}) = 0$ の検定が正しいとき、係数の対数尤度関数の微分係数が平均的には０になるという事実をもちい、ラグランジュ乗数検定を行う。この検定の統計量の一般形は次のようなものである。帰無仮説のもとでの制約をうける係数ベクトルを θ_1 とし、制約を $\theta_1 = \theta_{10}$ とする。制約をうけず、推定される係数ベクトルを θ_2 とする。帰無仮説の元での最尤推定をおこなうことから

$$s_2 = \frac{\partial \log f(y, \theta_{10}, \hat{\theta}_2)}{\partial \theta_2} = 0$$

である。一方、帰無仮説のもとで制約をうける係数について、対数尤度関数

$$s_1 = \frac{\partial \log f(y, \theta_{10}, \hat{\theta}_2)}{\partial \theta_1}$$

は必ずしも０ではないが、制約が正しいとき、s_1 の分布は漸近的に期待値０，分散 $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ の正規分布に従う。ただし、

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

を (θ_1, θ_2) についての Fisher 情報量行列の逆行列とする。したがって、帰無仮説のもと、

$$s_1' \left(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \right)^{-1} s_1$$

はカイ自乗分布に従うはずである。これがラグランジュ乗数検定である。

$\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ の推定は、係数ベクトル θ の Fisher 情報量行列が

$$\sum_{i=1}^{n} E[\ell \ell']$$

と表現できることを用いる。ただし

$$\ell_i = \left(\frac{\partial \log f(\tilde{y}_i, \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial \log f(\tilde{y}_{i-1}, \theta)}{\partial \theta} \right)$$

とし、$\tilde{y}_i$ を i 時点までの観測値ベクトルとする。

４．研究成果

(1) サイズと検出力

上述の方法により、統計量の公式を出すことができた。この統計量の大標本分布はカイ自乗分布であるが、実際のサンプルでのパフォーマンス、とくにサイズとパワーをモンテカルロ実験で調べた。

Table 1: Actual size of the LM test by Monte Carlo experiment

ψ_1	ψ_2	γ	ϕ_1	ω_1	$T=500$		$T=750$	
					5%	1%	5%	1%
0.8	0.7	0.1	0.7	0.51	6.30	1.60	6.20	1.40
0.6	0.7	0.1	0.7	0.51	6.80	1.70	5.90	1.30
1.0	0.7	0.1	0.7	0.51	6.90	1.90	6.00	1.00
0.8	*0.5*	0.1	0.7	0.51	6.60	1.60	5.00	0.80
0.8	*0.9*	0.1	0.7	0.51	7.10	1.80	6.80	2.00
0.8	0.7	*0*	0.7	0.51	7.10	1.80	7.10	1.40
0.8	0.7	*-0.1*	0.7	0.51	6.70	1.40	5.30	1.30
0.8	0.7	0.1	*0.5*	0.51	8.90	3.40	8.00	2.30
0.8	0.7	0.1	*0.9*	0.51	8.30	1.40	6.40	1.60
0.8	0.7	0.1	0.7	*0.31*	9.00	3.10	5.30	1.30
0.8	0.7	0.1	0.7	*0.71*	8.30	1.90	6.30	1.00

Table 1 が示すように、T=500 では正しいサイズからのずれはかなりあるが、T=750 では改善がみられる。この程度のサンプルサイズは金融データでは特別に大きいものではなく、十分実用に足りる検定であると判断できる。また、Table 2 はこの検定が十分な検出力を持っていることを示している。

Table 2: Actual power of the LM Test by Monte Carlo experiment

ϕ_2	λ	ω_2	$T = 500$ 5%	$T = 500$ 1%	$T = 750$ 5%	$T = 750$ 1%
0.5	1	0	27.70	11.50	39.50	19.40
0.9	1	0	99.80	99.20	100.00	99.90
0.7	*0.8*	0	14.60	5.40	16.00	4.80
0.7	*0.6*	0	29.60	12.90	43.20	22.00
0.7	1	*0.2*	13.20	4.60	20.40	7.40
0.7	1	*0.4*	39.60	18.50	54.50	33.20

(2)実証分析
提案された検定統計量の応用として、Hong Kong(HKG), India(IND), Shanghai(SHA), Indonesia(IDN), Japan(JPN), Korea(KOR), Malaysia(MYS), Philippines(PHL), Taiwan(TWN), Thailand(THA), Singapore(SGP)というアジア諸国の株式市場がvolatilityを共通にするか調べた。この問題は金融危機における国際間でのリスク伝播がアジア全域に重要な問題を引き起こしたことから、きわめて重要な問題である。

現状ではこの検定は2カ国間のvolatilityが共通かを検定することができるだけなので、グループに属するどの国も他の国と共通の volatility を有する可能性があるとき、そのグループは単一 volatility を有する可能性があると考える。その結果、単一 volatility を有する可能性があるグループは次のように列挙できる。

Countries possibly with the same common volatility.

1	HKG	IND	SHA	JPN		
2	IND	SHA	JPN	PHL		
3	HKG	IND	IDN	JPN	SGP	
4	HKG	IND	IDN	TWN	SGP	
5	IND	IDN	KOR	MYS	TWN	
6	IND	IDN	MYS	TWN	SGP	
7	IND	IDN	JPN	KOR	MYS	PHL
8	IND	IDN	JPN	MYS	PHL	SGP
9	IND	IDN	KOR	MYS	PHL	THA
10	IND	IDN	MYS	PHL	THA	SGP

表から明らかなように、台湾と上海の株式市場は独立性が比較的に強い。

残念なことに、この方法では単一 volatility の可能のあるグループは一意的ではない。より明確な結論を導くには、3 変数以上の場合において単一 volatility 共有の検定の開発が必要である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔その他〕
ホームページ等
http://mcobaya.web.fc2.com/

６．研究組織
(1)研究代表者
小林　正人(KOBAYASHI MASAHITO)
横浜国立大学・国際社会科学研究科・教授
研究者番号：60170354

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：