

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月31日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21530198

研究課題名（和文） 確率過程の統計的逐次解析とリスク管理への応用

研究課題名（英文） Statistical Sequential Analysis for Stochastic Processes and Its Application to Risk Management

研究代表者

永井 圭二（NAGAI KEIJI）

横浜国立大学・国際社会科学部・教授

研究者番号：50311866

研究成果の概要（和文）：本研究の出発点はLai and Siegmund（1983）の自己回帰係数に対する逐次推定の方法を単位根検定の問題に拡張することであった。本研究では確率過程の停止時刻による統計的推測の理論について考察し、応用としてオンラインリスク管理への適用を考える。研究のテーマは以下の4点である。

1. 経済時系列の定常性のモニタリング問題
2. 分岐過程の臨界性のモニタリング問題
3. 一般の離散時間マルコフ過程のパラメータのモニタリング問題
4. ベンチャー企業の倒産、合併、上場のオンラインモニタリング問題

研究成果の概要（英文）：The aim of this study is to develop the statistical sequential estimation of auto-regressive parameter initiated by Lai and Siegmund（1983）to unit root testing problem. In this study, statistical inference theory via stopping times relating to stochastic process is investigated and applied to online risk management. The following topics are the focus of the study:

1. Online monitoring problem of stationary economic time series
2. Monitoring critical branching processes
3. Monitoring problem of general discrete-time Markov processes
4. Online monitoring for bankruptcy, merger, and listing

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	2,200,000	660,000	2,860,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：社会科学

科研費の分科・細目：経済学・経済統計学

キーワード：計量経済学

1. 研究開始当初の背景

本研究では確率過程の停止時刻による統計的推測の理論について考察し、応用としてオンラインリスク管理への適用を考える。研究のテーマは

1. 経済時系列の定常性のモニタリング問題
2. 分岐過程の臨界性のモニタリング問題
3. 一般の離散時間マルコフ過程のパラメータのモニタリング問題
4. ベンチャー企業の倒産、合併、上場のオンラインモニタリング問題

の4つである。

まず、本研究の学術的背景を記述するにあたって、疫学的な事例ではあるが、最も印象的な2. の問題の応用例について述べよう。今、インフルエンザ、結核、HIVのような伝染性ウイルスの感染者が国内で増加していく状況を考えると、各時点での合計の感染者数は分岐過程として認識される。感染者が平均して m 人の個体にウイルスを感染させるものとする、分岐過程における m の値は① $m > 1$ 、② $m = 1$ 、③ $m < 1$ のそれぞれに対応し①超臨界的 (supercritical)、②臨界的 (critical)、③劣臨界的 (subcritical) と呼ばれる。超臨界的な場合ウイルスは爆発的に流行し、臨界的な場合安定的な流行となり、劣臨界的な場合ウイルスは根絶に向かう。この際、公衆衛生もしくは厚生に関わる政策担当者にとっては、ウイルス流行の初期の段階で m がどの状態にあるのか識別することが重要となる。統計的には帰無仮説: $m \geq 1$ に対し対立仮説: $m < 1$ の検定を行うわけだが、オンラインで感染者数が把握されていく中で推測を行う必要がある。

オンラインの統計的推測の方法は、推測を行う時点がランダムな停止時刻であることに特徴があり、統計的逐次解析理論とよばれ A. Wald, Sequential Analysis, Dover, (1947) がその記念碑的先駆としてあげられる。Wald の理論の第1の貢献は、独立同一分布に従う観測に対し単純帰無仮説 vs 単純対立仮説の検定を行う逐次確率比検定 (Sequential Probability Ratio Test, SPRT) の過誤確率(第1種、第2種の誤りを犯す確率)は近似的に分布によらないということを示した点である。第2の貢献は、SPRT は最適な逐次検定の方法であることを示した点にある。つまり、SPRT は、同じ過誤確率を持つ検定方法の中で、帰無仮説の下でも、対立仮説の下でも、期待停止時刻が最小、つまり一番期待標本数が少ない。Wald 以降の研究成果としては、離散時間観測の下で非線形更新定理により過誤確率および期待停止時刻を評価する M. Woodroffe, Nonlinear Renewal Theory in Sequential Analysis, SIAM, (1982)、D. Siegmund, Sequential

Analysis, Springer, (1985) があげられる。また研究代表者による研究業績⑥も比例ハザードモデルを念頭においた非線形更新定理を提案している。

問題はこれらの非線形更新定理をもちいる研究は、上記のウイルス感染の臨界性の検定といった問題には適用できないことにある。理由は単純で各時点での感染者数は独立でないからである。非線形更新定理は、対数尤度比が独立同一な確率変数の和、すなわちランダムウォークで近似できる場合に限り適用が可能で、ランダムウォークに対する Wald の恒等式がその第一次近似の基礎となっている。この研究の背景はこのような非独立に観測されるデータに対し統計的逐次解析の方法をどのように確立したらよいかというところにある。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散時間で観測される確率過程に対し、非線形更新定理を用いずに統計的逐次解析の手法を確立することにある。離散時間確率過程の統計的逐次解析の手法の嚆矢として Lai, T. L. and Siegmund, D. Fixed accuracy estimation of an autoregressive parameter. Ann. Statist., 11, no. 2, 478-485, 1983. がある。

3. 研究方法

オンラインモニタリングの問題では、研究目的で述べたように、統計的逐次推定・検定の問題および逐次的変化点探索の問題が重要である。非独立なデータが観測される場合、それらの問題を統一的に分析可能にする方法は、ターゲットパラメータに局所対立仮説を想定し連続時間確率過程の問題に帰着させることである。応用上問題となるのは過誤確率や期待停止時刻といった動作特性 (Operating Characteristics, OC) の解析的評価である (研究代表者は、いくつかのシミュレーションと数値計算により、非局所仮説に対しても、局所仮説を仮定することにより導いた理論的結果は、十分よい近似をもっている) と認識している)。そういった研究を各種の確率過程に対し行い、またベンチャー企業の倒産・合併・上場の問題の分析も平行して行った。

統計的逐次解析による検定・推定・変化点探索に関する OC は、離散時間モデルを連続時間モデルで近似したとき、ブラウン運動や拡散過程の汎関数の期待値として表される。そのときそれらの期待値は、拡散過程の生成作用素を2階の常微分方程式としてとらえたときの基本解から構成されるグリーン関数の積分として表現される場合がある。したがってグリーン関数の取り扱いにも習熟することが必要なる。グリーン関数に関する積

分は特殊関数を用いて表現されるので、特殊関数の数値解析が必要となる。逐次解析による統計量は、離散時間モデルを連続時間モデルで近似したとき、ブラウン運動や拡散過程の汎関数として表現されると述べたが、その理論の概要は以下のようなものである。離散時間マルコフ連鎖がある拡散過程で近似されるものとする。また帰無仮説に対する局所対立仮説の尤度比検定が、フィッシャー情報量で停止時刻を定めたとき、局所漸近正規 (LAN, local asymptotic normal) になっているとする。離散時間過程は仮説ごとに異なる拡散過程に収束するわけであるが、それらの分布は互いに絶対連続で、Girsanov 変換を行う指数マルチンゲールがその Radon-Nikodym の微分となる。それはまた離散時間における尤度比の極限にもなっている。スコアに対する極限をスコア過程、フィッシャー情報量に対する極限をフィッシャー情報量過程と呼ぶと、スコア過程の二次変分がフィッシャー情報量過程となる。そこでフィッシャー情報量過程から作られる停止時刻で時間変更を行うと、問題は LAN であるので、単純なブラウン運動のドリフトについての指数マルチンゲールに変更される。もとのフィッシャー情報量過程や SPRT はともに時間変更後の新たなブラウン運動のもとで定義される別の拡散過程によって表現される。

4. 研究成果

本研究の出発点は2006年の日本統計関連学会連合大会の招待講演および2007年のモスクワのSteklov Institute of Russian Academyで開催された学会 (Shiryayev教授主催) で報告した内容であったが、その主眼はLai and Siegmundの逐次推定の方法を単位根検定の問題に拡張することであった。AR(1)モデルに対して帰無仮説 (単位根) と対立仮説 (Fisher情報量の平方根の逆数のオーダーで帰無仮説に近づく局所対立仮説) との検定を考えた。そこでは、Bobkoski, M. J. (1983)に基づいてOrnstein-Uhlenbeck (OU) 過程へ拡散近似を考え、OU過程の対数尤度比過程は停止時刻を用いた場合、LAN(Local Asymptotic Normality)の構造を持つことを示した。したがって、Le Camの第3補題により、停止時刻までの標本を用いた最小二乗推定量は帰無仮説 (単位根) の場合でも、爆発的な場合を含む局所対立仮説の場合でも正規分布で近似されることがわかる。また最小二乗推定量をFisher情報量で止めたものは、OU過程の対数尤度比過程のスコア過程をその二次変分過程で止めたものと考えられるため、Le Camの第3補題を用いなくても、DDS(Dambis,

Dubins&Schwartz)のブラウン運動であることがわかるため正規分布することが示される。本研究では確率過程の停止時刻による統計的推測の理論について考察し、応用としてオンラインリスク管理への適用を考える。

21年度で、研究テーマ1に関してはすでに多くの点は完成している。しかし、逐次確率比検定の期待停止時刻の理論値の解析的表現を得ることができなかった。2. については学会発表の①で理論的結果を報告した。3. については連続拡散過程で近似される離散時間マルコフ過程について逐次確率比検定に関するWaldの過誤確率が1次の近似としてinvariantに成立する点を示したところが顕著な業績であるが、期待停止時刻などのOCの解析的表現にいたっていない。4. については競合リスクがあるCox比例ハザードモデルの拡張を考え一致性と漸近正規性について学会発表②で報告している。そこでは応用としてベンチャー企業の創業・倒産・合併・上場を考察し、新しい信用リスク評価モデルを構築している。

22年度は企業の設立、合併、倒産、上場といった事象を分析するための新しい計量経済学的手法について研究を行った。こうした事象を従来の生存時間解析を用いてとらえようとすると、設立から倒産までの存続時間を考え、合併を打ち切り (censoring) とし、ノンパラメトリックな手法およびセミパラメトリックな手法を適用するといったやり方が考えられる。本研究では企業の設立、合併、倒産、上場といったイベントをそのままとらえ、実時間 (カレンダータイム) を時間パラメーターとするハザードモデル構築し、ノンパラメトリックおよびセミパラメトリックな計量経済学的手法を提案した。

本研究は、実時間をパラメーターとするハザードを考察しているが、その貢献は、理論からの演繹でなく、ベンチャー企業のデータに基づいて推定量を提案し、シミュレーションにより妥当性を確かめ、実証分析を行っているという点にある。残された重要な仕事は統計量の数学的性質を調べることにあるが、重要な問題を提示している点で今後のこの領域の進展にとって価値が大きいと考えられる。

2011年11月30日に京都大学で行われた国際研究集会 “Recent Development in Statistics, Empirical Finance and Econometrics” での報告は、一階の自己回帰過程が自己相関を持つ残差から生成される場合についてノンパラメトリックな逐次単位根検定の方法を提案した。それは非逐次的なデータに対するPhillips=Perron検定に対応する。加えてp次の自己回帰過程に対して

単一の単位根の逐次検定についても新たに提案した。検定手法の漸近的性質は時間変更の手法を用いて DDS ブラウン運動によって表される次元 $3/2$ のベッセル過程によって特徴づけることが分かった。この研究は京都工業繊維大学の人見光太郎氏と京都大学の西山慶彦氏との共同研究である。

2012年1月12日の香港中文大学および同20日の東京大学で行われた報告では、自己回帰過程の単位根の逐次検定の理論についての総合報告を行った。自己回帰過程の単位根の逐次検定は、研究代表者ら（永井、人見、西山）が Lai and Siegmund (1983) の逐次推定の方法にヒントを得て、AR(1)モデルに対して単位根と局所対立仮説の逐次検定を考えた研究を端に発する。研究代表者らは、Ornstein-Uhlenbeck (OU) 過程へ拡散近似を考え、最小二乗推定量を Fisher 情報量で止めた検定統計量は局所漸近正規 (Local Asymptotic Normality) の構造を持つことを示し、さらに局所爆発的な場合においても検定統計量は正規分布となることを示した。また、期待停止時刻といった動作特性 (OC; Operating Characteristics) を $3/2$ 次元の Bessel 過程を用いて表現することにより特殊関数の数値計算で求められることも示した。またこの逐次的手法は Phillips=Perron のノンパラメトリック単位根検定、 p 次の自己回帰過程の単位根検定にも発展できることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計6件)

- ① 永井圭二、Sequential Unit Root Tests, 応用統計ワークショップ、2012/1/20、東京大学大学院経済学研究科学術交流棟 (小島ホール) (東京)
- ② Nagai, K., Sequential Unit Root Tests, The Chinese University of Hong Kong Statistics Seminar, 2012/1/12, Department of Statistics, The Chinese University of Hong Kong, Shatin, N. T., Hong Kong
- ③ Nagai, K., Sequential Test for Nearly Nonstationary AR(p) Processes, Recent Development in Statistics, Empirical Finance and Econometrics, 2011/11/30, Rakuyu-Kaikan, Kyoto University, KYOTO, JAPAN
- ④ Nagai, K., Multiplicative Intensity

Model Depending on Calendar time, The International Symposium on Statistical Analysis of Spatio-Temporal Data, 2010/11/05, The Chambers of Commerce and Industry of Kamakura City

- ⑤ 永井圭二・宋智、Cox proportional Hazard Model with Staggered Entry in Real Time、時空間統計解析その理論と応用、2009/11/20、宇治市生涯学習センター
- ⑥ Nagai, K., Asymptotics of sequential tests for some markov chains via convergence to diffusion, Russian-Japan Symposium on Stochastic Analysis of the Advanced Statistical Models, 2009/9/16, ステクロフ研究所 (ロシア)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永井 圭二 (NAGAI KEIJI)

横浜国立大学・国際社会科学研究所・教授
研究者番号：50311866