様式Ｃ

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 4 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００９～２０１１
課題番号：21540002
研究課題名（和文）有限群上のランダムウォークとその統計学への応用

研究課題名（英文）　Random walks on finite groups and application to statistics

研究代表者
吉田　知行（YOSHIDA TOMOYUKI）
北海道大学　・大学院理学研究院・教授
研究者番号：３０００２２６５

研究成果の概要（和文）：
１．有限群上のランダムウォークについて，有限群の表現論を使って，収束速度の評価を行った．
２．上の成果を使って，対称群上のランダムウォークが分割表のランダムサンプリングを誘導することを示した．
３．代数幾何的な手法で，金属考古学の問題(鉛同位体法による鉛の混合)を研究した．無関係に思えるが，２も３もマルコフ空間(高次元単体)内の力学系である．
４．表現論におけるバーンサイド環やマッキー関手をマルコフ空間上で研究した．

研究成果の概要（英文）：
1. We studied random walks on finite groups by using representation theory of finite groups, especially evaluation of their convergency ratio.
2. Applying the result of 1, we show that a random walk on a symmetric group induces a random sampling of covergency tables.
3. Applying some methods of algebraic geometry, we studies a problem in metal archaeology (lead isotope method with mixture of leads). 2 and 3 look unrelated, but Markokv spaces (higher dimentional simplexes) appear in both fields.
4. We studied Burnside rings and Mackey functors on Markov spaces in representation theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	3,330,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：有限群上のランダムウォーク，マルコフ空間，マッキ−関手，分割表，データセット，一致率検定，正確確率公式，数理考古学

１．研究開始当初の背景

(1) 概要． 有限群上のランダムウォークは，離散確率論では古くから研究されてきた．最近，有限群上の表現論という新たな方法及び計算代数統計からの要請という二つの分野から大きな影響を受けて内容を一新しつつある．

(2) 群上のランダムウォーク．この分野は，カードのシャッフルや疑似乱数発生，準モンテカルロ法による数値積分に関して,研究されてきた．しかし，これらの研究で用いられた群論は貧弱なものであった．やがて，Diaconis のように対称群の表現論を使った本格的な研究が始まる．群論の方でも，Lie 群上の確率過程が研究された(Gluck, K.Brown)．意外なことに，このような研究の確率統計への応用はほとんど見られない．

(3) 分割表の検定と列挙問題．分割表は，データ解析でもっとも基本的な概念である．数学的には単なる行列である．現代統計学の常識となったリサンプリング法にしたがって，周辺度数を固定した分割表をランダムかつ大量に(例えば百万単位で)生成し，現実に得られた分割表の出現確率を計算する．

(4) 統計学への代数学の応用．計算代数統計なる統計学の一部門が急速な発展を見せている．計算機指向の現代統計に代数学を応用したもので，グレブナー基底を用いたMCMC 法がその代表である．いくつかの国際研究集会(CASTA 2008 京都など)の主要テーマに取り上げられている．分割表の一致率検定への有限置換群や超幾何多項式の応用もある(吉田)．線形群の表現や対称多項式(zonal 多項式など)は古くから多変量解析に応用されてきた．

(5) 有限群の表現論の発展．近年，カテゴリー論による基礎付けがなされ使いやすくなった．とくに，バーンサイド環やマッキー関手，丹原関手の理論の重要性が認識されつつある．ただ，最近のモノイダルカテゴリーなど高次元のカテゴリーの理論に基づく拡張は未だ未完成である．

２．研究の目的

(1) 代数構造を持つ状態空間上のランダムウォーク(以下ＲＷ)．

① 群上のＲＷについて，表現論的・組み合わせ論的立場から研究する．

② 有限群上のＲＷの収束の速さを指標は持ちいて表すことができる．様々な有限群，とくに対称群について，収束の速さを計算する．差集合との関連も調べる．対称群上のＲＷは分割表のサンプリングに関係してきわめて重要である．

③ 対称半群上ののＲＷは，ブートストラップ法に関係する．対称半群の通常表現は対称群の表現論が使えるので，収束の状況を自然数の分割の言葉で表したい．距離正則グラフなどもゲルファント対の表現論により記述する．

(2) 統計学への応用．

① 統計学への応用．対称群上の RW より導かれる分割表や系統樹のランダムサンプリング研究，とくに収束の速さと RW の新しい方式．３次元以上の分割表の MCMC 法(群論的には解けない問題，Ｂ形ヘッケ環の表現と系統樹のラムサンプリング．

②ＤＮＡ系統学，比較言語学，金属考古学への応用．

(3) 統計学への応用を目指した代数学の研究．統計学の基礎をなす確率論にも思いがけず群論，表現論，カテゴリー論，とくに抽象バーンサイド環やマッキー関手が現れる．またマルコフ連鎖の理論は，代数的に見るなら，[0,1]-区間を係数体もどきとする線形代数である．このような見地からいくつかの代数の分野を研究する．

３．研究の方法

統計などの問題を，群論など抽象代数を使う．ただし，統計などの分野では，あまりに抽象的と思われる概念の使用は避ける．

(1) データセットと分割表の基礎理論．周辺度数分布を固定した２次元のデータセットは，カテゴリー論におけるスパンの概念と同じであり，またスパンの同形類である．さらにそこには対称群が可移に作用している．このことから分割表に関する理論をカテゴリー論や群論を使って書き直す．

(2) 対称群や対称半群の指標理論を用いてマルコフ連鎖の収束の速さを計算する．ここには数式処理システムを使う．従来のグレブナー基底の理論は使わない．

(3) 分割表の列挙問題はNP 完全問題であり，いわば手に負えない問題である．とくに高次元の問題は未だ未解決である．この問題を群の語の問題，ヘッケ環の非可換性に関係させて論ずる．

(4) 系統樹の列挙問題は分割表の場合と異なるヘッケ環が登場する．それについて同様の方法で研究する．さらに比較言語学で使われているシフト検定法やポリアの検定法を代数的に研究する．

(5) 実際の計算にはデータ解析用のＲというプログラムで作成する．

４．研究成果

(1) ランダムウォークの代数的基礎．

① 代数的には，マルコフ連鎖とは，マルコフ空間(離散確率空間を頂点集合とする単体

)上のマルコフ作用素(アファイン写像または線形力学系)である．この観点から，有限群の作用する集合上のランダムウォークの理論の再構成を行った．
② 写像 $f:X\to Y$ は，写像の対 $f^*:\Delta Y\to\Delta X$, $f_*:\Delta X\to\Delta Y$ を誘導する．f_* は自然な写像だが，f_* は条件付き確率の概念の一般化である．これらについてマッキ-分解やフロニウス相互率が成り立つことを発見した．このような見方からは，離散確率論を単位区間を係数体とする線形代数と考えられる．

２．表現論を使った，有限群上のランダムウォークの収束速度の評価．[09b]，[11b]．
① 有限G-集合 X 上のランダムウォー-ク $M:\Delta X\to\Delta X$ を考える．群論的にはヘッケ環，$End_{CG}(CX)$ の元である．したがってこの環が可換，とくに $X=G/K$ で (G,K) がゲルファント対の場合,M をヘッケ環の中心原始べき等元の線形結合で表せる．このことから収束の速さを指標で見積もることができる．
② 後述する分割表(ただし二次元)の場合はゲルファント対 $(G\times G, G^\Delta)$の場合である．ここでG^Δは対角部分群である．系統樹の場合は，有名なゲルファント対 $(S_{2n}, C_2^n S_n)$ に関連している [09b]，[11c]．

３．分割表の列挙問題への代数的解釈．[09a]，[10b]．
① 分割表は対称群のヤング部分群による両側剰余類の集合と見なせることを示した．その証明には，抽象バーンサイド環の理論を使った．使わなくても証明できるが，使えば，系統樹の場合への拡張が容易である[11c]．
② 上のことから，対称群上のランダムウォークは分割表のランダムサンプリングを誘導する．フィシャーの並べ替え検定やダイアコニスたちによるマルコフ基底を使った分割表のランダムサンプルイングとの関係を解明した．
③ 一致数に関するコーエンの検定の正確なp-値を計算する公式($_2F_0$ 型超幾何多項式を使う)がある．これは2008にHokkaido M.Jで発表した論文の結果だが，それの群論的組み合わせ論的背景が明らかになった．

４．統計解析用ブログラム言語Ｒでのいくつかのプログラムの作成．情報考古学会投稿予定論文で使ったプログラムだが，今のところ公表予定はない．

５．金属考古学への応用．[10c]，[10e]，[11a]．
① 青銅器製造の過程を解明するための従来の鉛同位体法は，鉛の混合があると使えない．ここではアファイン幾何と射影幾何に基づく新しい方法を得た．分野はマルコフ連鎖の代数的理論とは全く異なるように見える．しかし，確率測度の空間も鉛同位体率の空間もマルコフ空間であり，マルコフ連鎖も，鉛の混合も，マルコフ空間上の力学系と考えられる．論文は準備中である．概要は[2]．

６．代数分野の研究．
① 代数的確率過程や代数統計の分野の基礎をなすバーンサイド環とマッキ-関手について研究した．抽象バーンサイド環の理論が統計学に使えたのは意外であった [10a]，[10d]．
② 丹原関手としての斜バーンサイド環の研究を行った．論文は[1]．

7．国内外での位置づけ，今後の展望．
① 本研究の主題であるマルコフ連鎖の統計学，とくに分割表への応用は，従来グレブナー基底を使って研究されてきたが，より分かりやすい群論的方法の適用が成功したと言う意味で，今後の発展が期待できる．とくに竹村彰通(東大・工)の研究との関連付けが期待できる．何よりもグレブナー基底を使った分割表の列挙では，群論的方法と同じ結論が得られる．その理由も不明である．
② 丹原関手についてはこの数年大きな進展があった.とくに中岡によるWittベクトル，ラムダ環などとの関係の再発見は衝撃であった．今後の課題として，カテゴリーのゼータ関数(Artin-Mazur のものなど)の研究が期待できる [12a]．

なお,本研究の最終年度である2011年度は，教育関係の仕事が多忙を極め，論文執筆の時間的余裕がなかった．それらは現在とりまとめ中であり，完成次第投稿予定である．完成しているプレプリントとして以下のものがある．ジャーナル名は投稿予定先である．
(i) 「鉛同位体法の数理(1)---誤差と平面状分布」『情報考古学会』．
(ii) 「鉛同位体法の数理(2)---直線状分布とインゴット使用の可能性」『情報考古学会』．
(iii)「Categorial aspects of generating functions (II)」投稿先未定．
(iv) 「Fisher’s inequalities for BIBD with group action」(with T.Itoh) Hokkaido M.J.
(v)「An exact sequence of the character ring of a finite group」 (with Y.Onaga)Hokkaido M.J.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）すべて査読あり．

[1] Funmihito ODA, Tomoyuki YOSHIDA, "The crossed Burnside rings III:The Dress construntion of a Tambara functor"., Journal of Algebra, 327 (2011), 31-49..
[2] 吉田知行「鉛同位体比による青銅器製作の過程の推測（２）」『日本情報考古学会講演論文集』8 (2011), 31—35.

〔学会発表〕（計 11 件）

[12a] 吉田知行「カテゴリー論的に見た有限力学系のゼータ関数」, 於『有限体とそれに関連する代数的組合せ論』, 神戸学院大学, 2012/03/04.

[11a] 吉田知行「鉛同位体比による青銅器製作の過程の推測(2)」, 於『日本情報考古学会』, 共立女子大学, 2011/03/05.
[11b] 吉田知行「有限群上のランダムウォークと離散統計学への応用」, 於『第２８回代数的組合せ論シンポジウム』, 大分大学, 2011/06/21
[11c] 吉田知行「対称群上のランダムウォークと系統樹のランダムサンプリング」, 於『数理統計学の新たな展開』, 筑波大学, 2011/07/08.

[10a] 吉田知行「Mackey functor とその周辺」, 於『有限群論の集い』, 愛知教育大学, 2010/02/16.
[10b] 吉田知行「対称群を使った分割表のランダムサンプリングと一致数の正確な生起確」, 於『代数的組合せ論』, 神戸学院大学, 2010/03/18.
[10c] 吉田知行「鉛同位体比による青銅器製作の過程の推測」, 於『情報考古学会』, 大阪大学, 2010/03/27.
[10d] 吉田知行「Abstract Mackey Functors」, 於『代数的組み合わせ論シンポジウム』, 高知大学, 2010/06/22.
[10e] 吉田知行「金属考古学における統計的問題」, 於『統計的推測方法の理論的展開とその応用』, 熊本大学, 2010/11/18.

[09a] 吉田知行「分割表生成のための群論的方法」, 於『第２６回代数的組合せ論シンポジウム』, 山形市遊学館, 2009/06/24.
[09b] 吉田知行「有限 Gelfand 対と Markov 連鎖モンテカルロ法」, 於『表現論と組合せ論 』(北大 RIMS 共同研究事業), 北海道大学, 2009/08/28.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０）

〔その他〕
ホームページ等
以下は大学院生・研究者向けの談話会での講演．本研究のテーマと関係している．

(2012 近大)　吉田知行「代数と組み合わせ論をカテゴリー化しよう」, 於『近畿大学理工学部数学談話会』, 近畿大学, 2012/03/02.
(2011 熊本) 吉田知行「代数統計ことはじめ」, 於『熊本大学談話会』, 熊本大学, 2011/06/24.
(2010 山形) 吉田知行「代数統計ことはじめ」, 於『山形大学談話会』, 山形大学, 2010/11/11.

６．研究組織
(1)研究代表者
　吉田　知行（YOSHIDA TOMOYUKI）
　北海道大学・大学院理学研究院・教授
　研究者番号：３０００２２６５

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
　なし