

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6 月 11 日現在

機関番号：10103

研究種目：基盤研究 C

研究期間：2009～2011

課題番号：21540004

研究課題名（和文） 保型形式の周期，合同および Selmer 群

研究課題名（英文） Periods and congruence of modular forms, and Selmer group

研究代表者

桂田 英典 (KATSURADA HIDENORI)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：80133792

研究成果の概要（和文）：1変数尖点形式の Hermite modular 形式への Ikeda lift (Hermitian Ikeda lift) の周期に関する池田保氏（京大）の予想を完全に解決した。Symmetric fourth L 関数の critical value の代数性を証明した。また，Kim-Shahidi lift のスタンダード L 関数の特殊値を厳密に計算した。これにより，D. Zagier 氏が予想した Ramanujan delta 関数の Symmetric fourth L 関数の値と一定の比を除いて一致することを確認した（伊吹山知義氏（阪大）との共同研究）。

研究成果の概要（英文）：(1) We solved Ikeda's conjecture on the period of the Hermitian Ikeda lift.

(2) We compute the special values of certain vector valued Siegel modular forms and confirmed a conjecture proposed by N. Dummigan (joint work with N. Dummigan and T. Ibukiyama).

Moreover we computed the special values of the standard L-function of the Kim-Shahidi lift of Ramanujan delta function Δ , and confirmed that it is compatible with Zagier's conjecture

on the special values of symmetric fourth L function of Δ (joint work with T. Ibukiyama).

(3) We established an algorithm for computing the special values of the triple L function of elliptic modular forms (joint work with T. Ibukiyama). By using it we considered the congruence between Ikeda-Miyawaki lift and non-Ikeda-Miyawaki lift (joint work with T. Ibukiyama, C. Poor, and D. Yuen).

(4) We gave an explicit formula for the Fourier coefficient of the Poincare series for the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$ of $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$.

(5) We gave an explicit formula of twisted Koecher-Maass series of the Saito-Kurokawa lift. As an application we obtained a linear dependence of the special values of the Rankin-Selberg series of certain half-integral weight modular forms (joint work with Y. Mizuno). Moreover we gave an explicit formula of twisted Koecher-Maass series of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift.

(6) We consider congruence between the Klingen-Eisenstein series and cusp forms (joint work with S. Mizumoto).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学
 科研費の分科・細目：数学・代数学
 キーワード：数論

1. 研究開始当初の背景

以下の問題を考える。

問題A. F と f の周期の何乗かの比

$\langle F, F \rangle / \langle f, f \rangle^\circ$ を f に付随するL関数の特殊値を用いて表せ。

問題B. 問題Aにおいて $\langle F, F \rangle / \langle f, f \rangle^\circ$ が代数的数であったとする。このとき、 F とliftから得られないHecke固有形式 G との間の合同を与える素イデアルを問題AにおけるL関数の特殊値を用いて特徴づけよ。

問題C. 問題Bにおける合同を利用して、 f のGalois表現に付随するSelmer群の非自明な振れ元を構成せよ。

問題Aは保型形式論にとってきわめて興味深く重要な問題とみなされ、これまでも多くの研究がなされている。一方、問題Bは、土井公二、肥田晴三、石井秀則によるDoi-Naganuma lift (Hilbert保型形式へのlift)の場合における先駆的な研究があるものの、Siegel保型形式の場合には、問題Aほどには多くの人に注目されていなかったように思う。私(本研究代表者)は、 F が f の2次のSiegel保型形式へのliftであるSaito-Kurokawa liftの場合に問題Bをある条件の下で解決した。このような合同を論じる際には、Kohnen-Skoruppaによる周期関係式がきわめて重要な役割を果たした。同様なことはJ. Brownによっても考察された。さらに同氏はこれを利用して問題Cをある

場合に解決した。

さて、池田保(京大)は f の偶数次のSiegel尖点形式へのlift F を構成した。これを我々はIkeda liftと呼ぶ。Ikeda liftはSaito-Kurokawaの一般化である。さらに、同氏はIkeda liftの周期 $\langle F, F \rangle$ に関するある予想を提起した。これはKohnen-Skoruppaの周期関係式の一般化で、問題Aと関連する。私は、Saito-Kurokawa liftのときの考察をヒントにして、池田の予想を仮定して、Ikeda liftの場合に問題Bについて論じた。その後、私は、河村尚明(北大)との共同研究により池田の予想を完全に解決した。その結果、問題Aを完全に解決し、問題Bをある条件の下で解決した。

2. 研究の目的

本研究では、特に楕円尖点固有形式 f に対してあるSiegel尖点形式の空間 S への f の「lift」 F を考え、その周期と合同を関連させる。ここで、liftというのは、 S におけるHecke固有形式で、そのあるL関数(例えばスタンダードL関数またはスピンL関数)が f に付随するL関数を用いて表されるものとする。本研究では研究の目的に上げた3つの問題に肯定的な解答を与えるとともに、これらに関連する諸問題を考察する。

3. 研究の方法

1. 様々なliftに関する周期予想の定式化

(1) 伊吹山知義氏によって予想され

D. RamakrishnanとF. Shahidiによって証明された楕円尖点形式からベクトル値Siegel尖点形式へのliftに対して周期予想を定式化し、計算例を挙げる。その他、興味深いliftに対して同様のことを試みる。

(2) 池田氏は楯岡保型形式 f の Hermite 尖点形式への lift も構成し、周期に関して類似の予想を立てている。これが、同じ手法で証明できるか検討する。そのため、Hermite 尖点形式に造詣の深い長岡昇勇氏の知見を得る。

2 Miyawaki lift の周期に関する Ikeda 予想

まず、 f の Miyawaki lift F の周期に関する Ikeda 予想を証明することを考える。もし、うまくいかないときには、特別なものについて例を計算してみる。この際、 L 関数の特殊値の計算のため、微分作用素の計算が必要になるため伊吹山知義氏 (阪大) の知見を得る。また、Siegel 保型形式の Hecke 作用素の計算のため Cris Poor 氏 (Fordham Univ.) の知見を得る。

3. Miyawaki lift と non-Miyawaki lift の合同

楯岡尖点固有形式 f の Miyawaki lift と non-Miyawaki lift の合同を特徴付ける。上の結果が証明されないときは、この予想を支持する計算例を多く与える。

4. 研究成果

(1) 1 変数尖点形式の Hermite modular 形式への Ikeda lift (Hermitian Ikeda lift) の周期に関する池田保氏 (京大) の予想を完全に解決した。また、そのアデリック版も証明した。このような周期関係を用いて Hermitian Ikeda lift とそうでないもの間の合同関係を考察したが、完成はしなかった。

(2) Symmetric fourth L 関数の critical value の代数性を証明した。また、Kim-shahidi lift のスタンダード L 関数の特殊値を厳密に計算した。これにより、D. Zagier 氏が予想した Ramanujan delta 関数の Symmetric fourth L 関数の値と一定の比を除いて一致することを確認した。(伊吹山知義

氏 (阪大) との共同研究) また、Kim-Shahidi lift の周期関係式についてある予想を得たが、上の計算はその予想の解明に役立つと思われる。

(3) 1 変数保型形式の Triple L 関数の特殊値を与えるアルゴリズムを確立し、具体的な計算を行った。(伊吹山知義氏 (阪大) との共同研究) また、1 変数保型形式 f, g にたいして、Triple L 関数 $L(s, f \times f \times g)$ のある特殊値に現れる素イデアルが f, g の Ikeda-Miyawaki lift と non-Miyawaki-Ikeda lift の合同を与えるという予想を提出し、その数値例を与えた。(伊吹山氏, C. Poor 氏, D. Yuen 氏との共同研究)

(4) Siegel 級数に付随するある形式的べき級数の分母について精密な結果を得た。これは、S. Boecherer 氏の Siegel Eisenstein 級数の空間の研究に応用があると思われる。

(5) レベル付きの次数 2 のポアンカレ級数のフーリエ係数を与えた。これにより、レベル N の次数 2 のジーゲル保型形式のフーリエ係数の N に関する漸近挙動を調べた。

(松本耕二氏 (名古屋大), 千田雅隆氏

(京大) との共同研究)

(6) Dirichlet 指標 x で捻ったジーゲル保型形式 F の Koecher-Maass 級数について研究した。まず、Saito-Kurokawa lift の twisted Koecher-Maass 級数の明示公式を得た。これによりある 2 つの半整数重さのモジュラー形式の Rankin-Selberg 級数の整数点での値の線形従属性について従来では予想もしえなかった現象を見出した (水野義紀氏 (徳島大) との共同研究。) さらに、 F が Duke-Imamoglu-Ikeda lift のときその明示式を与え、これにより半整数重さ尖点形式と Cohen の Eisenstein 級数との Rankin-Selberg convolution product の特殊値達の 1 次従属性について調べた。

(7) ベクトル値ジーゲル保型形式の合同に関する Harder の予想に関連してそのスタンダード L 関数の特殊値を厳密に計算することにより Dummigun 氏が予想を具体的な場合に検証した (Dummigun 氏 (Sheffield 大), 伊吹山知義氏 (阪大) との共同研究.)

(8) Klingen Eisenstein 級数と尖点形式との合同について研究した (水本信一郎氏 (東工大) との共同研究.)

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

(1) (査読有) H. Katsurada, Y. Mizuno Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modular forms, J. London Math. Soc.

85(2012)455-471

(2) (査読有) T. Ibukiyama, H. Katsurada, An Atkin-Lehner type theorem on Siegel modular forms on Siegel modular forms and primitive Fourier coefficients, Series on Number Theory and Its Applications Vol. 7(2011) 196-210

(3) (査読有) N. Dummigan, T. Ibukiyama, H. Katsurada, Some Siegel modular standard L-values, and Shafarevich-Tate groups, J.N.T.131(2011) 1296-1330

(4) (査読有) H. Katsurada, Rankin Selberg method and periods of modular forms, MSJ Memoirs vol. 21,(2010) 86-114

(5) (査読有) H. Katsurada, Exact standard zeta values of Siegel modular forms of degree 2,, Experiment. Math. 19 (2010) 65-77

(6) (査読有) H. Katsurada and H. Kawamura, On the Andrianov type identity for power series attached to Jacobi forms and its application, Acta Arith.145(2010) 233-265

(7) (査読有) H. Katsurada, A remark on the normalization of the standard zeta values for Siegel modular forms Abh. Math. Seminar Hamburg 80(2010) 37-45

(8) (査読無) 桂田英典, 河村尚明, Ikeda's conjecture on the period of the Ikeda lift, 数理解析研究所講究録 1659,(1999) 68-81

(9) (査読無) 桂田英典, 水野義紀, An explicit formula for the twisted Kocher-Maass

series of the Saito-Kurokawa lift and its applications, 数理解析研究所講究録 1659, (1999)47-58

[学会発表] (計 7 件)

(1) 千田雅隆, 桂田英典, 松本耕二
On Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree two with respect to congruence subgroups,
2012年度日本数学会年会, 2012, 3, 29, 東京

(2) H. Katsurada, Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modular forms, International Workshop on Mathematics 18th-22th February in Oman, 2012, February 17th (Muscat)

(3) H. Katsurada, Period of the Hermitian Ikeda lift, Explicit theory of automorphic forms, applications and computations
2011, May 12th (Luminy)

(4) H. Katsurada, Periods and congruences of various lifts,
"Automorphic forms, special values of L-functions, congruences and Shimura varieties"

2011.2.09, Fourier Institute (France)

(5) H. Katsurada, Periods and congruences of various lifts, Miyama "Kayabuki Seminar" Special Values of L-functions and Arithmetic Geometry" 2010.10.09 Miyama (Japan)

(6) H. Katsurada, Formal power series attached to Siegel series of Rankin Selberg type related to Siegel series and its application to Siegel modular forms,

KMS-AMS Joint Meeting 2009.12.16 Ewha Womens Univ. (Korea)

(7) 桂田英典 保型形式に付随する Rankin-Selberg 型ディリクレ級数とその応用, 東北大学整数論セミナー 2009, 6. 25 東北大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

、

6. 研究組織

(1) 研究代表者

桂田 英典(KATSURADA HIDENORI)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号:80133792