様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年４月２日現在

機関番号：１２３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００９～２０１１
課題番号：２１５４０００６
研究課題名（和文）　無理数論の新たな展開

研究課題名（英文）　A new development of irrational number theory

研究代表者
天羽　雅昭（AMOU MASAAKI）
群馬大学大学院・工学研究科・教授
研究者番号：６０２０１９０１

研究成果の概要（和文）：
線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数ついて、それが有限な無理数度を持つための使い易い十分条件を確立した。その応用により、無限積関数の整数分の１での特殊値が代数的独立になるための新しい十分条件を確立した。また、無限積関数が２つの場合に限っては、消去法の応用により、それらの代数的数での特殊値が代数的独立になるための十分条件を確立した。さらに、上記に用いた方法の公理化についても研究し、無限積関数以外の解析関数への応用の道を拓いた。

研究成果の概要（英文）：
For infinite product functions satisfying a chain of linear Mahler functional equations we established a useful sufficient condition for finiteness of the irrationality measure of the infinite product functions. We applied the condition to show a new criterion for algebraic independence of the values of the infinite product functions at the reciprocal of an integer. We also proved algebraic independence of the values of two infinite product functions at a general algebraic number by using elimination theory. Moreover, we investigate an axiomatic way of our method, which would have certain applications besides the infinite product functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：無理数、超越数、代数的独立性、正規性、パデ近似、消去法

１．研究開始当初の背景

研究代表者は、平成 11 年度以降科学研究費の補助を受け、線形関数方程式系を満たす解析関数の特殊値について一連の研究を行ってきた。これらの研究において重要な役割を果たしたのはパデ近似の方法であり、その大きな成果は、線形微分方程式系に関する Shidlovsky の補題の類似が、線形 q-差分方程式系や線形 Mahler 関数方程式系に対しても成り立つことを確立したことである。このように、無理数論（超越数論）に於けるパデ近似の方法の有効性が立証される一方で、

Schmidt の部分空間定理などの深い結果の目覚しい応用が展開されるなど、近年の無理数論の進展は著しい。以下に、当該研究の背景をなす最近の研究（上記の研究を除く）について５つの項目に亙って述べる。

(1) 線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす解析関数の特殊値

線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たすベキ級数の特殊値について、Duverney は帰納的方法を創始した (Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 2001)。この方法は、その後、Duverney と西岡久美子によって一般化され (Acta Arith.,2003)、さらに立谷によって無限積で表される関数へ広げられた (J. Number Theory, 2007)。これに関して、研究代表者は、Väänänen との共同研究により、無限積で表される関数に対するパデ型近似の性質を代数的に詳しく調べ、その結果、当該関数が関数として有限の無理数度を持つための実効的な判定条件を得た。そして、これに帰納的方法を組み合わせることで、当該関数の特殊値の代数的独立性についての結果を得ることに成功した。

(2) Schmidt の部分空間定理の応用

Bugeaud と Adamczewski は、Schmidt の部分空間定理を応用して、代数的無理数の complexity が線形ではないことを示すと同時に、有限オートマトンで生成される小数展開をもつ無理数 (automatic irrationals) は超越数であることを証明し、Loxton と van der Poorten による 長年来の予想を肯定的に解決した (Ann. of Math., 2007)。さらに、Adamczewski、Bugeaud、および Luca は、上記後者の結果を一般化すべく stammering function の概念を導入し、その代数的数に於ける特殊値の性質を調べている。

(3) Automatic irrationals の無理数度

Bugeaud は、2 以上の各有理数に対して、それを無理数度にもつ automatic irrationals が存在することを示した (Math. Ann., 2007)。また、Adamczewski と Rivoal は、automatic irrationals の生成関数のパデ近似を用いて、Thue-Morse、Rudin-Shapiro、Baum-Sweet などの数列で定義される automatic irrationals の無理数度を評価した。

(4) 新しい無理数度

研究代表者と Bugeaud は、2 以上の自然数 b を固定したとき、与えられた実数の b-進展開に現れる繰り返しパターンに注目することにより、新しい無理数度の概念を導入し、この無理数度に関する存在問題を考察した。

(5) 正規性の判定条件

Bailey と Crandal は、Pseudo-Random Number Generators の概念を用いて、与えられた自然数 b に関する b-正規性の判定条件を定式化し、その応用として正規数の具体例を数多く与えることに成功した (Experimental Math., 2002)。また、Bailey と Misiurewicz は、hot spot の概念を導入し、実数が b-正規であることと、それが base b について hot spot をもたないこととが同値であることを、エルゴード理論を用いて証明した (Proc. A.M.S., 2006)。

２．研究の目的

背景で述べた諸研究の間には、次に述べるような関係がある。まず、(1)で考察している無限積関数の特殊値は、automatic irrationals を一般化した数と見なせる点で(2)と関係している；(3)は、(2)の定量化を無理数度の観点で行っている；(4)で導入された概念は、(2)で用いられた議論に関係がある；(4)において、(5)の結果との融合により、与えられた無理数度をもつ b-正規数の具体例が構成されている。

当該研究では、これらの研究を方法論的にも深めながら、具体的には、線形 Mahler 型関数の鎖を満たす解析関数と stammering function の共通点と相違点の究明および両者の特殊値についてのさらに進んだ研究、b-進展開に係わる新しい無理数度と b-正規性についての詳しい研究などを行うことを目的とする。これらの研究は、その内容に於いても方法に於いても、無理数論の新たな展開を目指す重要なものである。

３．研究の方法

線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数の特殊値の代数的独立性についての研究、および無理数度と正規性についての研究を、以下に従って行う。

(1) 無限積関数の特殊値の代数的独立性

線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数について、研究代表者が Väänänen と共同で行った研究は、当初の目論見を越えて、特殊値の代数的独立性を示すまでに至った。この成功は、Duverney によって創始された帰納的方法が、当該無限積関数の全体が作る群構造とうまく馴染むことに負っている。しかし、帰納的方法を使うために、無限積関数が関数として有限の無理数度をもつことを仮定する必要があった。そこで、当該研究では、この研究の自然な延長として、無限積関数が関数として有限の無理数度をもたない場合を含めて、その特殊値の代数的独立性について調べる。帰納的方法の基本的手段は、与えられた関数たちに対する同時パデ近似である。無限積関数が関数として有限の無理数度をもつ場合は、同時パデ近似で得られた関数の零位数をコントロールできるため、帰納的方法が有効に働く。無限積関数が関数として有限の無理数度をもたない場合

に、この問題点をどのように克服するか。帰納的方法の方法論的分析をさらに進め、その可能性を探る。

Mahler 型関数の特殊値の研究に於いては、それが満たす関数方程式（の鎖）の反復適用が重要な役割を果たす。一方、stammering sequence の生成関数である stammering function の特殊値の研究に於いては、stammering sequence がもつ反復パターンが重要な役割を果たす。両者の間の類似点と相違点をより深く究明することを通じて、これらの関数の特殊値の研究を発展させる。

(2) 無理数度と正規性

Automatic irrationals をめぐって、無理数度の研究にも新生面が拓かれつつある。構成的観点では、Bugeaud が、2 以上の与えられた有理数を無理数度にもつ automatic irrationals の存在を証明し、automatic irrationals の世界の豊富さを示した。これに対して、Adamczewski と Rivoal は、有名な automatic sequences（Thue-Morse、Rudin-Shapiro、Baum-Sweet などの数列）から生成される automatic irrationals を主なターゲットとして、それらの無理数度についての詳しい研究を行った。さらに、研究代表者は Bugeaud との共同研究で、automatic irrationals についての研究から示唆を得た、新しい無理数度の概念を２種類導入し、それに関する研究を始めた（以下 [AB] で参照）。[AB] で定義された新しい無理数度では、2 以上の自然数 b について、与えられた実数を b-進展開したときの繰り返しパターンに注目する。そのひとつは、小数点第 r+1 位から 0 が m 回続くときの比 m/r を考え、これらの r に関する上極限を尺度とするものである（以下 b-無理数度と呼ぶ）。そして、もうひとつは、小数点第 r+1 位から始まった長さが s のパターンが m 回続くときの比 (m-1)s/(r+s) を考え、これらの r と s とに関する上極限を尺度とするものである（以下 eb-無理数度と呼ぶ）。定義より、b-無理数度は eb-無理数度以下であり、eb-無理数度は無理数度から 1 を引いたもの以下である。[AB] において、与えられた実数を b-無理数度または eb-無理数度にもつ無理数の存在問題が論じられたが、今のところ強い制約の付いた結果しか得られていない。そこで、[AB] で展開された連分数理論による構成的方法をさらに深めるとともに、より抽象的な構成方法を模索しながら、b-無理数度および eb-無理数度に関する存在問題を追求する。

b-進展開に基づく上記の研究は、必然的に b-正規性の研究と結びつく。実際、[AB] において、Bailey と Crandall による b-正規性の研究を応用することにより、2 以上の与えられた実数を無理数度にもつ b-正規数の具体例を構成することに成功した。これは、無理数度と b-正規性の係わりを研究する重要な第一歩であり、今後の展開を強く促すものである。そこで、当該研究では、b-正規性の判定法を深めるとともに、無理数度と b-正規性に跨る無理数論の一分野の確立を目指す。

４．研究成果

当該研究課題においては、線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数の特殊値についての進んだ研究、および b-進展開に係わる新しい無理数度と b-正規性についての詳しい研究などを行うことを目的としていた。しかし、無限積関数についての研究が、当初予想していたより広がりを見せるに連れて、この研究を突き詰める方向に向かうこととなり、b-進展開に関わる研究については進展が得られなかった。以下で、線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数およびその特殊値について、得られた成果を４つの項目にまとめて述べる。

(1) 無限積関数の有理性について

無限積関数が有理関数になるための十分条件については、立谷による結果が知られている。しかし、そこでは無限積の項の有理関数の次数が、当該無限積関数における Mahler 型変換の指数以下であるという仮定が必要であった。当該研究では、これについて踏み込んだ研究を行い、無限積関数の項が有限の項を除いてすべて多項式になる場合に、多項式の次数についての制限なしに、それが有理関数になるための必要十分条件を確立した。一方、無限積関数が有理関数であることと代数関数であることは同値なので、この成果により、無限積関数の項が有限の項を除いてすべて多項式になる場合については、無限積関数の超越性について本質的な解明がなされたことになる。

(2) 無限積関数の無理数度について

無限積関数で表される無理関数について、その無理数度が有限になるようなものの広いクラスを見出した。この成果を得るために、既に得られていた「無理数度が有限になるための判定条件」を、より有効に応用する方法を考案した。具体的に述べると、これまでの応用では、当該無限積関数の隣接項の間でテレスコーピング型のキャンセレーションが起こらないことを、項の零点或いは極の位数を調べることで確認する方法を取っていた。これに対して、今回の研究では、当該無限積の各項の零点或いは極についてのより踏み込んだ情報（１の累乗根を零点あるいは極に持つ、実数の零点あるいは極のみを持つ、等の情報）を使うことで、以前には証明できなかった多くの無限積に対して、その無理数度が有限であることを示すことが出来た。この成果は、有限な無理数度を持つ幾つかの関数

について、それらによって生成される非自明な単項式すべてが有限な無理数度を持つための一般性のある判定条件を導き、無限積関数たちの代数的独立性について既に得られている結果と併せることにより、代数的独立な無限積関数の例を構成することを容易ならしめた。これにより、応用範囲は飛躍的に拡大され、実際、無限積関数の整数分の１での特殊値が代数的独立になる例を構成することが容易になり、多くの興味深い例が得られた。

(3)　２つの無限積関数の特殊値の代数的独立性について

上記(1)で述べたように、無限積関数の整数分の１での特殊値については、関数の個数についての制限なく、それらの代数的独立性についての結果が得られた。これを、超越性の場合のように、一般の代数的数での特殊値に拡張することが、当該研究における大きな課題であったが、少なくとも２つの無限積関数の特殊値については、１つの一般的結果を得ることができた。具体的には、２つの無限積関数から生成される非自明な単項式すべてが有限な無理数度を持つとき、２つの無限積関数の代数的数での特殊値は代数的独立になる。整数分の１での特殊値の場合には、Duverney による帰納的方法を特殊値に直接応用することが有効であったが、一般の代数的数での特殊値の場合には、この方法が上手く機能しない。実際、この方法は、超越性の証明においても、整数分の１での特殊値の場合でないと上手く機能せず、その問題点を克服したのが Duverney と西岡による関数に対する帰納的方法（関数の超越測度を評価するための帰納的方法）であった。当該無限積関数に対しては、Duverney と西岡の方法によって、既に代数的独立度に関しての結果が得られていたので、これを元に特殊値の代数的独立性を調べることが残された問題であった。そして、通常の Mahler 関数の研究において大きな成果を挙げている方法である、Nesterenko および Philippon による消去法の理論が、この場合にも有効であることが判明した。ただし、定式化されている消去法の結果は、そのままの形では当該無限積関数に対して使えなかったため、消去法のステップそのものを検討し直すことが必要であった。得られた結果を、関数が３つ以上の場合に拡張することが今後の重要な課題となるが、そのためには消去法の再検討を含め、より広い視野での研究が必要とされることが予想される。

(4)　公理的方法について

上記の成果は、線形 Mahler 関数方程式の鎖を満たす無限積関数に対して行われたものであるが、そこで用いられた方法を公理化する可能性を追求し、これらの無限積関数だけではなく、より広いクラスの解析関数にも適用可能な枠組みの構築を開始した。このような方向では、Töpfer による公理的方法があるが、この方法は通常の Mahler 関数をモデルにしているため、当該無限積関数などには適用できない。当該研究では、超越測度を求める方法および２つの数の代数的独立性を示す方法について、Töpfer による条件を緩めた形での公理化が得られた。これを一般化することは、今後の重要な課題である。

なお、研究代表者は、当該研究費補助金によりフィンランドへの渡航（2010 年 3 月 10～30 日；2010 年８月 26 日～9 月 12 日；2011 年８月 2～18 日）を行い、海外研究協力者の Väänänen 氏（オウル大学）と、上記の成果を得るに当たって本質的な役割を果たした研究討論を行った。また、得られた成果については、すべてをまとめた形で、Väänänen 氏と共著論文を準備中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

①Masaaki Amou, Yann Bugeaud
Exponents of Diophantine approximation and expansions in integer bases,
J. London Math. Soc., 査読有, Vol.81. 2010, pp.209-316

〔学会発表〕（計　０件）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕

特になし

６．研究組織

(1)研究代表者

天羽　雅昭（AMOU　MASAAKI）
群馬大学大学院・工学研究科・教授
研究者番号：60201901

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし