様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　５日現在

機関番号：13901
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2011
課題番号：21540012
研究課題名（和文）数論的問題から生じる誤差項の解析的研究
研究課題名（英文）Analytic properties of the error term arising from the arithmetical problems

研究代表者
谷川　好男（TANIGAWA YOSHIO）
名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：50109261

研究成果の概要（和文）：数論的誤差項，特にディリクレの約数問題から生ずる誤差項Δ(x)について，Δ(x)やその２乗を係数に持つディリクレ級数の解析的性質を研究すると共に，Δ(x)を含む積分の明示公式を導いた．またΔ(x)と深い関係にあるチャウラ-ワールムの和について，指数対の理論を適用し，上からの評価を改良した．またこの和の２乗平均値定理についても，従来知られている結果の改良を得た．一方，我々の研究対象の一般化として，一般約数問題をチャウラ-ワールムの和の拡張を用いて研究し，その誤差項の２乗の離散平均と連続平均の差を詳細に研究した

研究成果の概要（英文）：First we studied the analytic properties of the Dirichlet series obtained by the arithmetical error term, especially by the error term Δ(x) arising from the Dirichlet divisor problems. We also derived the explicit formula of the integral involving Δ(x). Secondly we treated the sum of Chowla and Walum. We succeeded to improve its upper bound by using the theory of exponent pairs. We also got an improvement of its mean square formula. As a generalization of our study, we considered closely the difference of the discrete and continuous mean square formulas of the error term obtained from the general divisor problems by using the generalized sum of Chowla and Walum.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：約数問題，円問題，数論的誤差項，チャウラ-ワールムの和，ベルヌーイ多項式，リーマンゼータ関数，多重ゼータ関数，平均値定理

１．研究開始当初の背景

数論的関数 a(n) は一般に激しく振動することから，a(n) の x までの総和の挙動が最も重要な問題になる．総和の主要項は多くの場合，初等関数であらわされるから，主な研究対象は誤差項である．ディリクレの約数問題など古典的な問題において，誤差項の上下からの評価，２乗平均などが精細に研究されてきた．そのとき，a(n) を係数とするディリクレ級数の解析的な性質を，ペロンの公式によって総和に反映させるのが常道である．た

とえば $a(n)$ が約数関数 $d(n)$ の場合,対応するディリクレ級数はリーマンゼータ関数の２乗になり，ヴォロノイは，その極の位置や，関数等式から，誤差項 $\Delta(x)$ の級数表示式を導いた．このヴォロノイ公式はその後の研究の最も重要な基礎の一つとなっている．

一方，$\Delta(x)$ には周期的ベルヌーイ多項式の和による表示がある．いわゆるチャウラ-ワールムの和による表示と言われるものである．チャウラとワールムは彼らの名を冠した和に関してある種の予想を立てているが，1980 年代以降，このチャウラ-ワールムの和に関して，金光-シタラマチャンドララオ，ノヴァック，プライスマンなどにより多くの研究がなされてきた．

$\Delta(x)$ のべきの離散平均と連続平均の差に関する考察はハーディの論文の中に散見するが，連携研究者の一人である古屋淳は，2006 年の論文でその差を詳細に研究し，非常に興味深い結果を出している．

以上のことを背景にして，我々は $\Delta(x)$ を含む積分や，$\Delta(x)$ およびそのべきを係数とするディリクレ級数の解析的性質，また，２次元の一般約数関数に対して，離散平均と連続平均の差を調べるということを動機として，この研究は始まった．

２．研究の目的

数論的誤差項の研究は長い歴史を持つ古典的な問題である．平均値定理などは近年盛んに行われている研究分野であり，古典的理論の見直しとともに多くの目覚しい結果が得られている．中でも約数問題における誤差項 $\Delta(x)$ の研究は最も代表的なものである．当研究課題では以下のことを目的とした．

(1) $d(n)$ ではなく，$\Delta(n)$ 自身，及びその２乗を係数に持つようなディリクレ級数の解析的性質を考察する．特にこれらの関数の解析接続可能性，極の位置や位数，そこでの留数，$\mathrm{Im}(s)$ が大きくなる時のオーダー評価を研究する．また得られた結果を $d(n)\Delta(n)$ を係数とするディリクレ級数に研究に応用する．

(2) 次に $\Delta(x)$ を含むメリン変換型の積分を研究対象とする．まず絶対収束域を超えたところでの，積分の存在を問題にする．特に一様収束性が問題になるが，それを示し明示的な表示式を求める．また積分が存在しない範囲では，積分区間に関する大きくなる度合いを求める．

(3) 前述のように，チャウラ-ワールムの和はディリクレの約数問題と深い関係にある．我々はチャウラ-ワールムの和の新しい漸近式を導き，その２乗平均などを調べる．またチャウラ-ワールムの和の評価に関して，指数対の理論を適用し，従来知られている結果を改良する．

(4) 約数問題に関して，離散平均と連続平均の差は，古屋により詳細に研究されたが，これを一般約数問題の２乗平均の場合に拡張する．それによって，一般約数関数に関する２乗平均値定理で抜けおちていたところを補い，完璧なものにする．

３．研究の方法

(1) $\Delta(n)$ を係数とするディリクレ級数の場合は，ある種の和をメリン-バーンズの積分表示に持ち込み，解析出来る形にする．一方 $\Delta(n)$ の２乗を係数とする場合は問題は更に困難であり，最終的にはイヴィッチによる $\Delta(x)$ のラプラス変換の結果に帰着させる．

(2) $\Delta(x)$ のメリン変換型の積分では，解析接続性はわかっているので，積分自体の挙動を問題とする．特に周期的ベルヌーイ多項式の積を含む積分がカギになり，その評価を良くするために，ディリクレのハイパボーラメソッドなどを駆使した．またコンヴォリュージョン型になっている周期的ベルヌーイ多項式の積の積分を，目的(3)のチャウラ-ワールムの和に結びつけ，良い評価を導く．

(3) ヴァン-デアーコルプトの指数積分の漸近式を少し精密にしたミンの定理を，チャウラ-ワールムの和を指数和に変換したのちに適用し，チャウラ-ワールムの和に対するヴォロノイ公式ともいえるものを導出する．これを用いて，チャウラーワールムの和の２乗平均値定理を導く．またヴァン-デアーコルプト，フィリップスによる指数対の理論を適用し，チャウラ-ワールムの和の上からの評価を改良する．

(4) $\Delta(x)$ がチャウラ-ワールムの和を用いて表されることは既知である．一般約数関数の場合には，チャウラ-ワールムの和を拡張する必要がある．それと(2)で用いた方法を組み合わせ，離散平均と連続平均の差を解析する．

４．研究成果

この研究課題においては，上記の４項目を中心に研究に取り組んだ．以下，それぞれについて得られた結果を述べることにする．

(1) 約数関数から生ずる誤差項 $\Delta(n)$ およびその２乗を係数とするディリクレ級数を考え，それらの解析接続，極の位置，留数など

を決定した．$\Delta(n)$を係数とする場合，対応するディリクレ級数は全平面に解析接続され，s=1 に２位の極，０ と負の偶数点に１位の極を持つ．一方$\Delta(n)$の２乗を係数とするディリクレ級数では，現時点では $Re(s)>2/3$ まで接続でき，s=3/2 に１位の極，s=1 に３位の極を持つ．この結果は特にイヴィッチによる$\Delta(x)$のラプラス変換の結果に依存している．そのため s の実部が 2/3 以下の領域への接続は現時点では難しいと思われる．またラウ-ツァンの公式および彼らの予想と，我々の$\Delta(n)$の２乗から得られるディリクレ級数の 解析的な性質,特にそれぞれの極における留数との関係について考察をした．

上記の類似物として，ガウスの円問題の場合にも同様の研究を行った．

さらに関連する問題として，$d(n)\Delta(n)$を係数とするディリクレ級数について解析接続可能性や，極の位置などの結果を得た．この応用として，今までは取り扱うことのできなかった多重(２重)ゼータ関数の非自明な接続を証明することができた．

解析数論では Im(s)に関するオーダー評価は非常に重要である．$\Delta(n)$の２乗を係数とするディリクレ級数,および $d(n)\Delta(n)$を係数とするディリクレ級数について，Im(s)に関する評価を得た．

(2) $\Delta(x)$のメリン変換型の積分の明示的な形を，平均値定理を用いない初等的な議論で導いた．入っている複素パラメータの実部が１より大で 5/4 より小さいときは積分は絶対収束せず，評価にいろいろな工夫が必要であった．また１以下の場合はこの積分は発散する．そこで x までの積分を考え，x に関するオーダーを調べた．そのために２つの周期的ベルヌーイ多項式のコンヴォリュージョン型の積の積分と，チャウラ-ワールムの和を用いて表示した．この結果は次に述べる事項とも関連しており，非常に興味深い．

(3)前述のように$\Delta(x)$は２つのチャウラ-ワールムの和の和として書けている．そこでチャウラ-ワールムの和自体の平均値定理もよく研究されてきた．我々はチャウラ-ワールムの和を指数和に変換した後，ミンの定理を適用し，ヴォロノイ公式に類似の表示を導いた．これによってチャウラ-ワールムの和の２乗平均について，従来知られていた結果を大きく改良することができた．

さらに指数対の理論を応用して，チャウラ-ワールムの和の上からの評価についても改良することができた．

(4)チャウラ-ワールムの和による誤差項の表示を，一般化されたチャウラ-ワールムの和を定義することにより，２次元の重み付き一般約数問題の場合に拡張した．この表示と古屋の離散平均と連続平均の差の公式を組み合わせることにより，一般約数問題の場合に，離散２乗平均と連続２乗平均の差を詳細に研究した．その結果，従来抜け落ちていた場合についても２乗平均の結果を補うことができた．(3)の後半で述べたことと，(4)は On the general divisor problem and the sum of Chowla and Walum およびその II として論文にまとめ，現在投稿中である．

(5)上に述べたこと以外に，ラマヌジャンのローストノートブック p.196 にある二つのディリクレ級数に関する等式に証明を与え，かつ関連する組み合わせ論的に非常に興味深い公式を導いた．これは，バーントとチャンとの共同研究である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計８件)

① J.Furuya, Y.Tanigawa, Explicit representations of the integral involving the error term of Dirichlet divisor problems II, Glasgow Math. J. 54 (2012), 133-147, 査読有.

② H.H.Chan, Y.F.Yan, Y.Tanigawa, W. Zudilin, New analogues of Clausen’s identity arising from the theory of modular forms, Adv. Math. 228 (2011), 1294-1314, 査読有.

③I.Kiuchi, Y.Tanigawa, W.Zhai, Analytic properties of double zeta functions, Indag. Math. 21 (2011), 16-29, 査読有.

④ X.Cao, Y.Tanigawa, W.Zhai, On the conjecture of Chowla and Walum, Science China Math. 53 (2010), 2755-2771, 査読有.

⑤ J.Furuya, Y.Tanigawa, Analytic properties of Dirichlet series obtained from the error term of Dirichlet divior problem, Pacific J. Math. 245 (2010), 239-254, 査読有.

⑥ J.Furuya, Y.Tanigawa, Explicit representations of the integral involving the error term of Dirichlet divisor probles, Acta Math. Hungar. 129 (2010),24-46, 査読有.

⑦ J.Furuya, Y.Tanigawa, W.Zhai, On

Dirichlet series obtained by the error term in the Dirichlet divisor problem, Monatsh. Math.160 (2010), 385-402, 査読有.

⑧ Y.Tanigawa, W.Zhai, Fourth power moments of Δ(x) and E(x) for short intervals, Int. J. Number Theory, 5 (2009), 355-382, 査読有.

〔学会発表〕(計１３件)
①谷川好男,古屋淳, 数論的誤差項の２種類の平均値の差の解析について, 第126回日本数学会九州支部例会, 2012年2月11日, 九州工業大学.

②谷川好男, On some generalization of Catalan constant, 第3回沖縄整数論セミナー, 2011年12月24日, 沖縄高専.

③谷川好男, On the mean of shifted error term in the theory of Dirichlet divisor problem, 第3回沖縄整数論セミナー, 2011年12月23日, 沖縄高専.

④谷川好男,古屋淳, 円問題の誤差項を含む積分の性質について, 日本数学会秋季総合分科会, 2011年10月1日,信州大学.

⑤Y.Tanigawa, Two Dirichlet series found on page 196 of Ramanujan's Lost Notebook, Number Theory Seminar Aug. 24 2011, Beijing Institute of Petro Chemical Technology, China.

⑥ Y.Tanigawa, On the general divisor problems and the sum of Chowla and Walum, The 6th China-Japan Conference on Number Theory, Aug. 16, 2011, Shanghai Jiaodong University, China.

⑦谷川好男, 古屋淳, 約数問題の誤差項を含む広義積分の明示公式の初等的な導出法について, 第124回日本数学会九州支部例会, 2011年2月11日, 福岡教育大学.

⑧谷川好男, Two dimensional divisor problems and its applications to the difference between the discrete and continuous mean of the error tem in the general divisor problems, 第2回沖縄整数論セミナー, 2010年12月18日, 沖縄高専.

⑨谷川好男,古屋淳, 約数問題の誤差項を含む積分の性質について, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月25日,名古屋大学.

⑩谷川好男,古屋淳, 約数問題の誤差項を係数に持つDirichlet級数の性質について, 日本数学会年会, 2010年3月26日, 慶応義塾大学.

〔図書〕(計０件)

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
谷川 好男（TANIGAWA YOSHIO）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：50109261

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
金光 滋（KANEMITSU SHIGERU）
近畿大学・産業理工学部・教授
研究者番号：60117091

木内 功（KIUCHI ISAO）
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：30271076

古屋 淳（FURUYA JUN）
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・講師
研究者番号：10413890