

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月 23日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540016

研究課題名（和文） 対称群のモジュラー表現論から非線型微分方程式へ

研究課題名（英文） From modular representations of the symmetric groups  
to nonlinear differential equations

研究代表者

山田 裕史 (YAMADA HIROFUMI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：40192794

研究成果の概要（和文）：自ら新たに導入した多項式「ブラウアー・シューア函数」に関しては、KP 方程式系やその被約版、さらにはアフィンリー環の表現論でも一定の役割を果たすことが確認されつつある。中国天津での数理物理学国際会議で講演したことをまとめて「ブラウアー・シューア函数に関するノート」と題する短い論文を出版した。

研究成果の概要（英文）：The importance of the “Brauer-Schur functions”, which had been introduced by myself, is now being recognized in the area of KP hierarchy, its reductions and representations of affine Lie algebras. I published a short note entitled “A note on Brauer-Schur functions”, which is contained in the proceedings of the international conference on Mathematical physics held in Tianjin, China.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：

科研費の分科・細目：

キーワード：シューア函数，アフィンリー環，岩堀・ヘッケ環，カルタン行列

## 1. 研究開始当初の背景

ソリトン方程式とは「ソリトン」と呼ばれる特殊解をもつ非線型可積分系の総称である。KdV方程式は古くから有名であるが、このKdV方程式と代数幾何学との関係は1970年

代に問題にされ現在に至るまで研究が続いている。とくに1980年に佐藤幹夫がKP理論を発表してからはKdVを特別な場合として含むKP方程式、あるいは無限連立系であるKP方程式系とグラスマン多様体の代数幾何学が精

力的に研究されている。これらの方程式系は双線型方程式、いわゆる広田方程式に書き直すことにより、摂動法を用いてそのソリトン解が求められる。広田良吾によるこの方法は単に微分方程式の解法をあたえるのみならず、その構造を深く知る上で非常に重要なものと位置づけられる。我々はグラスマン多様体の組合せ論、すなわちシューベルト解析とKP方程式系、BKP方程式系の広田表示、そして対称群のモジュラー表現論を3本の柱としてその関係をさらに深く探っていく、というのが当初の背景、動機であった。

## 2. 研究の目的

以上の背景をふまえて「対称群のモジュラー表現論から非線型微分方程式へ」という研究課題を掲げるに至った。もちろん対称群だけに限定せず同様の取り扱いのできるワイル群やヘッケ環をも射程に入っているの言うまでもない。通常表現に比してモジュラー表現では可積分系との組合せ論的な関係がより鮮明に見えてくることが期待される。

とにかくまず対称群のモジュラー表現論の何が使えて、何が使えないかを見極める必要がある。シューア函数がKP理論の軸になっていたことを思い起こせば、そのモジュラー版ともいえる「モジュラー・シューア函数」が重要な研究対象になろう。そのような函数をしっかりと把握することが重要な課題である。私は数年前にモジュラー・シューア函数の候補となる函数を見だし「ブラウアー・シューア函数」と名付けていた。今まで「名前負け」していて、特段の性質を示さなかったのだが、ここ最近、新たな視点で計算を試みたところ、意外に「よい」のではないかと、という期待を抱かせてくれている。

## 3. 研究の方法

ブラウアー・シューア函数の特徴をできる限り精緻に調べること。

私のブラウアー・シューア函数は素数 $p$ を固定したとき、通常指標を既約ブラウアー指標に置き換えたものとして定義される。従って(被約)シューア函数とはいわゆる「分解行列」により結びついている。シューア函数はもともと一般線型群の既約指標であり、積の展開は既約表現のテンソル積の既約分解に対応している。展開係数は既約表現の重複度そのものであり、従って非負整数であることは自然な帰結である。我々のブラウアー・シューア函数についても「何かの既約指標」であることが期待されるが、まだ捕まえきれない。シューア・ワイルの相互律のモジュラー版というべき定理があり、そこから何もかも自然に導きだされる、というような枠組みを見出したい。

既約ブラウアー指標から作られるいわゆるブラウアー・シューア函数と、その射影被覆から作られる(射影)ブラウアー・シューア函数の両方を考え合わせるにより、対称群の分解則やB型ワイル群の分解則に対応する係数を見いだせそうな気がしている。証明はこれから考えるのだが、予想の式はある。もしかしたら結晶基底がいるかも知れないし、そのために無限次元リー環の言葉を用いなければいけないかも知れない。簡単な組合せ論的な事実の証明に大層な大道具が必要になることは屢々である。何が出てくるか、不安でもあり、楽しみでもある。

## 4. 研究成果

自ら新たに導入した多項式「ブラウアー・シューア函数」に関しては、KP方程式系やその被約版、さらにはアフィンリー環の表現論でも一定の役割を果たすことが確認されつつある。中国天津での数理物理学国際会議で講

演じたことをまとめて「ブラウアー・シューア関数に関するノート」と題する短い論文を出版した。

上に述べたブラウアー・シューア関数を用いて、対称関数のなす環の「混合基底」という良いものの存在を示した。対称群のモジュラー表現ともうまくマッチしそうである。そこで混合基底がKP, BKP方程式系においてどのような役割を演ずるのかを詳しく調べた。究極の解析には石川雅雄, 若山正人による「小行列式和公式」が重要な働きをするのではないかというアイデアを持ち続けているが現時点では具体的なことは何もわからない。またBKP方程式系についてはKP方程式系ほどには理論の整備が為されていない。この組合せ論的な側面の研究を私は自身のライフワークと位置づけている。BKPの背後にはリー超代数の表現論も控えている。対称群の、あるいはその2枚の被覆群の標数2のモジュラー表現論とリー超代数の表現論をBKPを通して解明して行きたい、というのが長期的な研究計画である。今回の報告では「正しい方向に進んでいる」という程度のことしかいえないが、多少なりとも貢献できているつもりである。

以上の話とは別の話題もある。ずいぶん前に出版されて、ヘッケ環の表現論と結晶基底を結びつけたLascouxたちの、いわゆるLLTについて、その最後に載っている数表をもとに実験的な計算を試してみたところ、面白い現象に気が付いた。組合せ論的な議論だけでも十分出版の価値があると考え、大学院生の安東雅訓, 同僚の鈴木武史と論文を準備した。少し詳しく述べれば、アフィンリー環のシャポヴァロフ形式の行列式を組合せ論的に表示することに成功したことになる。この行列は岩

堀・ヘッケ環のカルタン行列に対応しており、行列式はその重要な不変量である。さらにはその行列の単因子型に関して気が付いた現象がある。その本質的な意味、証明については現在の最重要課題である。いわゆる Khovanov-Lauda-Rouquier の次数付きヘッケ環の表現論との関係も徐々にわかって来ており、新しい世界が拓けるような予感がする。ただしこの手の組合せ論は深く研究すればするほど「だんだん当たり前になって来る」という性質がある。もしかしたら本質的には易しいことかもしれない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

(1) 安東雅訓, 鈴木武史, 山田裕史,  
Combinatorics for graded Cartan matrices  
of the Iwahori-Hecke algebra of type A,  
Ann. Comb. (to appear), 査読有

(2) 青影一也, 水川裕司, 山田裕史,  
A note on Brauer-Schur functions,  
Proceedings of International Workshop on  
Quantized Algebra and Physics", 1-9 (World  
Scientific) 2011, 査読有

(3) 山田裕史, Brauer-Schur functions and  
compound bases, RIMS-Kokyuroku 1656  
(2009), 1-8, 査読無

[学会発表] (計6件)

(1) 山田裕史, 対称群のカルタン行列に  
まつわる組合せ論, 日本数学会代数学  
シンポジウム, 2011年8月8日,  
岡山大学

(2) 山田裕史, 対称群のカルタン行列に  
まつわる組合せ論, 代数群研究会,  
2011年2月20日, 稚内北星学園大  
学

- (3) 山田裕史, 対称群のカルタン行列,  
日本数学会中国四国支部会, 2011年  
1月30日, 鳴門教育大学
- (4) H. F. Yamada, Compound basis and  
affine Lie algebras, Interational  
Conference on Quantized Algebra  
and Physics, 2009年7月26日, 南  
開大学, 天津, 中国

[図書] (計1件)

- (1) 山田裕史, 組合せ論プロムナード,  
日本評論社, 2009, 160ページ

[産業財産権] なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 裕史 (YAMADA HIROFUMI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 40192794

### (2) 研究分担者 なし

### (3) 連携研究者

吉野 雄二 (YOSHINO YUJI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 00135302

中村 博昭 (NAKAMURA HIROAKI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・教授  
研究者番号: 60217883

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)  
岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授  
研究者番号: 30335294