

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540022

研究課題名（和文）有限群の特徴を反映する集合と群の構造の研究

研究課題名（英文）Sets which reflect properties of finite groups and structure of groups

研究代表者

千吉良 直紀（CHIGIRA NAOKI）

熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：40292073

研究成果の概要（和文）：

有限群の特徴を反映する集合として、群から群への写像の逆像を考え、それを使って群の構造を特徴づける。写像の性質をと群の構造の関係を研究する。また、関連した斜準同型の個数についての考察を行う。さらに、散在型単純群の特徴を表す2元生成性、散在型単純群が作用する組み合わせ構造の研究を行う。

研究成果の概要（英文）：

As a set which reflects properties of finite groups, we treated pre-image of a certain function between groups. We studied some properties for the function and the structure of groups using this. Also we studied some properties of the number of crossed homomorphisms, two generated properties for sporadic simple groups and combinatorial structure related to Rudvalis simple group.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数学

科研費の分科・細目：数学、代数学

キーワード：群論

1. 研究開始当初の背景

群を研究する上で、群が作用する集合や、群の性質から得られる集合と群の関係を調べるということが基本的、かつ重要な手段である。群 G の特徴を表す特別な集合を作るために、 $G^m = G \times \cdots \times G$ から G への写像 f を考え、 G の元 a に対して f の逆像 $f^{-1}(a) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \mid f(x) = a\}$ を考える。例えば、 $f(x) = x^n$ という写像を考え、単位元の f による逆像は G の n 乗根の集合であり、Frobenius 以来研究され

ている重要な集合である。また、この集合は群の間の準同型の集合や斜準同型の集合と関連し研究されている。また、先行する Bandman らによる群の可解性を特徴づける群の元の列に現れる式を変形すると、 $f(x,y) = y^{-1}[xy^{-1}x^{-1}, x^{-1}yx]$ という写像が得られ、この写像から群の位数の性質や群の構造などを調べることができる。群、特に単純群の性質や群の構造を調べるために、何か良い集合を考える必要があり、その1つとして写像の逆像を考え、群の構造を研究する、また、

派生して得られるさまざまな集合（組み合わせ集合など）と群の関係を見出し、群の性質を見つけることが群を研究する上で重要である。

2. 研究の目的

1. で述べたような観点から、さまざまな集合と群の構造の関係を見出し、特徴づけを行うことを本研究の目的とした。具体的には次のようなことを中心に研究を行った。

(1) 上述の $f(x,y)=y^{-1}[xy^{-1}x^{-1},x^{-1}yx]$ に関して次のような特徴づけを行う。

① 個々の単純群や特徴のある単純群について、 f の逆像を記述し、群の構造との関係を明らかにする。

② 表現論と関係を見出す。

(2) 群を研究する上で、良い性質を持った写像を見出し、特徴づけを行う。また、斜準同型などの群の写像と密接に関係している対象についてその性質と、群の関係を明らかにする。

(3) 同様の問題意識から、単純群を中心とした群の構造を調べるうえで重要な組み合わせ構造を用いた群の特徴づけ、構成法などを研究する。また、表現論的、組み合わせ論的な考察も行う。

3. 研究の方法

研究目的を達成するため、本研究では連携研究者とのセミナーによる問題解決、および専門的知識を持った研究者との意見交換を主体として、研究を行った。また、多くの具体的な計算例を得るために、群論・組み合わせ論用計算ソフト MAGMA を用いた。具体的には、以下のとおりである。

(1) 写像の逆像についての研究では Isaacs や Solomon の結果が知られている。また、Brauer によって与えられた、群の元の上へのある同値関係が本研究では有効になる。これらを中心に、逆像の集合およびそれによって与えられる分割についての考察を行う。

(2) 具体的な写像を与えた場合、その逆像を計算することは一般には難しいことである。そこで、具体的な群を与え、計算用ソフト MAGMA を用いて実際に計算を行い、その結果から分割の様子やそこから見て取れる性質を研究する。

(3) (1) で述べた Brauer による同値関係は斜準同型へ拡張される。この拡張された斜準同型の上への同値関係を用いて、斜準同型の個数を考察する。

(4) 個々の群特有の性質を示す集合を定義し、その性質を調べる。特に Rudvalis 群についてその部分群の性質や関係を細かく調べるが必要であったため、専門知識を持

つ研究者と研究討論を行い、研究を遂行した。この際に、具体的な計算を多くする必要があり、MAGMA を使って Rudvalis 群のどの部分群が Rudvalis 群を研究する上で有効であるかなどを詳しく調べた。

(5) 群の性質を調べるためには、いろんな群で同様の性質を持つような普遍的な良い対象物を見出す必要がある、そのための 1 つは写像の逆像であり、また組み合わせ構造である。このようなものを数多く具体的に計算することによって良い性質を見出していくことが、重要であった。その結果として、2 元生成性に関する研究も行うことができた。

4. 研究成果

主な研究成果は以下のとおりである。

(1) 群 G がべき零群とする。 G^m から G への m 変数写像 $f(x)$ が、1 つの変数の次数が ± 1 でその他の変数の次数が 0 であるとする。ここで、変数の次数とは写像に現る変数 x_i の冪の総和である。このとき、 G の各元 a の逆像 $f^{-1}(a)$ に含まれる G^m の元の総和は常に $|G^{m-1}|$ に等しいことを示した。 $f(x,y)=y^{-1}[xy^{-1}x^{-1},x^{-1}yx]$ も条件を満たしているので、 $f(x,y)$ においては逆像の集合に含まれる元の個数は $|G|$ に等しいことになる。この $f(x,y)$ については本研究代表者によって示されていたが、より一般の写像に拡張されたことになる。

(2) 一般に G^m から G への写像 $f(x)$ が与えられたとき、その逆像による G^m の分割を考える。それぞれの分割に含まれる元の個数を保つよう写像を変換することができることがわかった。これはおもに Isaacs や Solomon による手法を用いる。特に上述の $f(x,y)$ を変換することによって、さまざまな写像が得られることがわかった。このことから良い写像を見つけるとともに、同じ個数ずつに分割を与えるような写像の間の関係やその分割の集合の関係、扱いやすい分割があるのかなどを考察していくことが今後の課題であると思われる。

(3) 群 G に関する写像 $f(x,y)=y^{-1}[xy^{-1}x^{-1},x^{-1}yx]$ は、群の可解性と関係していると考えられる。その一端として、可解群であれば、 $|f^{-1}(1)|=|G|$ であることや $|f^{-1}(1)| \geq |G|$ であれば、 G の位数が偶数であることなどがある。奇数位数の群は可解群であるが、奇数位数の群の可解性を調べるうえで、CA 群の研究がある。CA 群とは単位元以外のすべての元の中心化群が可換群であるという群である。偶数位数の CA 群も存在する。それが $PSL(2,2^n)$ である。 $PSL(2,2^n)$ において $f^{-1}(1)$ を求めた。具体的に

は、各共役類の代表元 x に対して相棒となる y をすべて求めた。

以上 (1) から (3) の結果については、まとめて論文投稿するため準備中である。

(4) 群 A が群 G に作用するとき、 A から G への斜準同型を $Z(A,G)$ と書くことにする。 $Z(A,G)$ は A が巡回群の時には群上のある方程式の解 (すなわち、ある写像の逆像) と 1 対 1 に対応する。この意味である種の一般化である。

半直積 AG の指標を 1 つ取る。ある方程式の解集合の各元に対する指標の和が代数的整数であることを Hall が証明している。この定理を斜準同型の言葉で言い換え、斜準同型の間の同値関係を用いて、Hall の定理の別証明を与えた。また、さらに A から G への斜準同型の個数 $|Z(A,G)|$ についての合同式を考え、 A/B が巡回群であるような正規部分群 B が存在するとき、その個数は $(|A/B|, |G|)$ を法として 0 に等しいことを示した。この結果は Frobenius によるある群の方程式の解の集合の個数に関する合同式のある種の一般化になっている。さらに $|Z(A,G)|$ に関する浅井-吉田による合同式の予想があり、その特別な場合の証明を与えたことになる。この結果は現在雑誌に投稿中である。

(5) 有限単純群は 2 元で生成される。2 変数の写像は 2 つの元の関係を調べるうえで役に立つ。2 元生成の群のうち、位数が 1、2 でないような元に対しては必ずある共役元との 2 元で生成されるような群の分類を行った。26 個の散在型単純群のうち、17 個がこの条件を満たしている。多くの交代群や Lie 型の単純群はこの性質を満たさない。散在型単純群の多くがこの条件を満たす理由があるのかどうかは今後の研究課題である。Lie 型の単純群の一部を残してほとんどすべての場合に分類ができた。残る部分の考察とあわせて、投稿準備中である。

(6) 個々の単純群の性質を調べるという観点から、Rudvalis 群について研究を行った。Rudvalis 群はランク 3 の置換群として定義され、また 28 次元の表現を持つことが知られている。本研究において、2 元体上の表現を考えたときに、Rudvalis 群は部分群である 9 元体上 3 次元ユニタリ群が作用する 5 つのデザインを用いて構成することができるということがわかった。この結果の一部は講演発表を行っている。その後、28 次元の格子との関係を再検証することで、Rudvalis 群をうまく構成できることがわかってきた。現在この研究は継続中で、この研究をさらに進め、投稿する予定である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① 平峰 豊, A construction for modified generalized Hadamard matrices using QGH matrices, Designs, Codes and Cryptography, 査読有, vol.62, 2012, 279-288
- ② 平峰 豊, On (p^2, p, p^2, p) -difference sets in Zp^3 , Journal of Statistical Theory and Practice, 査読有, vol.6, 2012, 88-96
- ③ 平峰 豊, A family of non class regular symmetric transversal designs of spread type, Designs, Codes and Cryptography, 査読有, Vol. 60 (2011) 91-99
- ④ 平峰 豊, Modified generalized Hadamard matrices and constructions for transversal designs, Designs, Codes and Cryptography, 査読有, Vol.56, 2010, 21-33
- ⑤ 平峰 豊, On abelian $(2n, n, 2n, 2)$ -difference sets, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A, 査読有, Vol.101, 2010, 281-284
- ⑥ 渡邊 アツミ, On the Dade character correspondence and isometries between blocks of finite groups, Osaka J. Math. 査読有, 47 (2010) 817-837.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 千吉良 直紀 単純群と組み合わせ構造、南九州代数系集会、2011年8月27日、鹿児島県・鹿児島大学
- ② 千吉良 直紀 Odd Order Remark について、有限群論草津セミナー 2011年7月31日、群馬県・草津セミナーハウス
- ③ 千吉良 直紀 Rudvalis 群と符号、第 28 回代数的組み合わせ論シンポジウム、2011年6月20日、大分県・大分大学
- ④ 千吉良 直紀 On groups generated by two elements、Research into vertex operator algebras, finite groups and Combinatorics (RIMS 研究集会)、2010年12月14日、京都府・京都大学
- ⑤ 千吉良 直紀 有限群での Magma の利用、Magma で広がる数学の世界、2010年10月10日、福岡県・九州大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

千吉良 直紀 (CHIGIRA NAOKI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：40292073

(2) 研究分担者

研究者番号：

(3) 連携研究者

渡邊 アツミ (WATANABE ATUMI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：90040120

平峰 豊 (HIRAMIME YUTAKA)
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号：30116173