

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 7 日現在

機関番号：32615

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540023

研究課題名(和文) 距離正則グラフの構造と表現

研究課題名(英文) Structures and representations of distance-regular graphs

研究代表者

鈴木 寛 (SUZUKI, HIROSHI)

国際基督教大学・教養学部・教授

研究者番号：10135767

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：距離正則グラフとは限らないグラフの完全正則符号の共同研究により得られた結果から、完全正則クリークグラフ(CRCG)の研究が、古典的距離正則グラフの分類に本質的な役割を果たすことに着目し、Terwilliger 代数の拡張を用いて、基本的な性質を示すと共に、薄いCRCGの研究が、薄いQ-多項式型距離正則グラフの分類に結びつくことを示した。

研究成果の概要(英文)：Through the investigations of completely regular codes of a graph not necessarily distance-regular, I reached a concept of completely regular clique graphs, and gave several evidence that it plays a key role in a classification of classical distance-regular graphs. In particular, a thorough investigation of thin completely regular clique graphs will imply a classification of thin Q-polynomial distance-regular graphs.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組合せ論 距離正則グラフ Terwilliger 代数 完全正則符号 有限幾何

1. 研究開始当初の背景

距離正則グラフの研究手法として、以下の二通りのものが通常考えられ、研究もそのいずれかの線で行われてきた。

A. 距離正則グラフは、古典幾何から得られるものがほとんどであることから、距離正則グラフの研究は、大きく二つの段階に分けられる。

(a) 距離正則グラフは、自然な幾何構造を持つことを示すこと。

(b) 距離正則グラフの自然な幾何構造は、古典的な幾何となること。

幾何構造からは、部分構造が得られることから、部分構造とその全体との関係を組合せ論的に論じる手法ともいえる。

古典的な幾何の分類や、BN Pair と関連した、ビルディングの分類、C.W. Weng による、各距離に対して強閉部分グラフの存在を仮定して、ある条件のもとで、分類を考える方法や、A. Hiraki による強閉部分グラフの存在定理など、部分的な結果はあるが、(a) も (b) も満足な結果には至っていない。

B. もう一つの見方は、距離正則グラフの多くは、 Q -多項式型という、非常によい代数構造を持つことから、二つの段階に研究を分けることである。

(c) 原始的な距離正則グラフで直径の大きなものは、 Q -多項式型であることを示すこと。

(d) Q -多項式型の距離正則グラフを分類すること。

Q -多項式型という性質は、非常によい表現をもつことを保証するものであるため、代数を有効に用いることができ、特に、 Q -多項式型の距離正則グラフは、Leonard Pair や、Tridiagonal Pair で表される表現を持つことがわかり、80年代のD. Leonard および、E. Bannai-T. Ito の研究により、Leonard Pair が分類され、すべての Q -多項式型距離正則グラフのパラメタは、5つの基本的なパラメタで、表すことができることが知られていた。

このことを用いて、80年代以降、特に、P. Terwilliger とそのグループによって、いくつかのパラメタ型については、そのパラメタを持つ距離正則グラフが分類された。しかし、この手法も、特別な整数条件を用いることで、パラメタを決める多くの計算を必要とすることもあり、一般的な場合については、行き詰まりを見せていた。

これら A と B の手法、すなわち、A にお

ける、幾何的構造の研究と、B による代数的手法の研究を結びつけるものとして、注目されてきたのが、以下の二つである。

(e) Terwilliger 代数の既約加群を調べることで、代数的な性質を、単にパラメタの制限を得るためだけでなく、距離正則グラフ自体の構造を考察するために用いること。

(f) 強閉部分グラフがさらに、完全正則符号になっている場合の幾何構造を決定すること。

(e) は代数的手法の、幾何的手法への歩み寄り、(f) は幾何的手法の代数的手法への歩み寄りとも見ることができる。

このような背景のもとで、2005年の論文で、本研究者は、(e) と (f) を結びつける、Terwilliger 代数の拡張を定義し、さらに、部分構造が、完全正則になる条件および、あるベクトルが薄い既約加群を生成する十分条件を得た。

これは、その後の研究に非常に大きな影響を与える結果であるが、まだ、どのような構造に注目して、表現を考えるのがよいのかについては、本質に至っていない。

2. 研究の目的

科学研究費応募段階での、研究目的の要旨としては、以下のものをあげている。

要旨：アソシエーション・スキームの構造と表現について培ってきた知見と研究方法と道具を、距離正則グラフ(P -多項式型スキームに付随するグラフ)に応用し、部分構造に関する幾何をもつ距離正則グラフを類し、Geometric Girth の上限の存在をある程度一般的な状況で示すことを目的とする。

ここで述べられている、「構造と表現」は、背景の項で述べた、幾何構造と、代数構造に対応するものである。

さらに、二つの目標を掲げている。1は、幾何構造による、距離正則グラフの問題であり、2は、幾何構造を構成するために不可欠のステップである、Absolute Bound の存在に関する予想についてのものである。

1. D -bounded な距離正則グラフの分類を行う。実際には、もう少し大きなクラス、すなわち、正則の条件を落として、与えられた任意の二点を含み、直径がこれら二点の距離と等しい強閉な部分グラフを常に含む距離正則グラフについて考察する。全体の直径 D がある程度大き

い場合の完全分類が最終目標ではあるが、パラメタ c_i が $c_i = (q^i - 1)/(q - 1)$ ($i = 2, 3, D - 1, c_2 = q + 1$) を満たす場合を最初に解決する。Dual Polar Graphs に対応する場合である。 $q = 1$ の場合は、Hamming Graph に対応し、野村和正などにより 90 年代前半に分類が完成している。この場合以外にも、Hermitian Forms Graph に対応している場合、および、散在型のグラフに対応した場合がある。

2. Geometric Girth の Absolute Bound の存在を示す。これは難問で、完全な解決はこの期間にはできないかも知れないが、そのモデルともなりうる、Regular Near Polygon の場合の解決を行う。テストケースとしても重要な、二部グラフで $(c_i, b_i) = (1, a)$ または $(a, 1)$ となる場合、 $k = 3s, a_1 = s - 1$ となる場合などを考察しながら、より一般的な設定でのこの問題の解決を図る。

3. 研究の方法

具体的な方法としては、以下の二点をあげている。

1. 本研究においては、構造論、特に、組合せ構造、幾何構造に焦点をあてた研究と、表現論、特に、直交多項式と固有値の重複度の整数条件、Terwilliger 代数、および、Terwilliger 代数の拡張(これは鈴木により定義され様々な形で研究が進展しているものである)の加群の性質の考察、完全正則符号および、ロイド型の定理の応用など、代数的な手法の両面をフルに使って考察する。
2. D -bounded な距離正則グラフの分類において、鍵は、直径が $D - 1$ の強閉な部分グラフが完全正則符号となる条件を確定することと、直径が $D - 1$ の強閉な完全正則符号を持つ場合の分類に分割して考えることである。いずれの場合も、組合せ的議論とともに、Terwilliger 代数の拡張の表現、固有値の重複度、ロイド型の定理による直交多項式の根の整数条件などの考察を行う。

4. 研究成果

以下、研究成果について、発表論文、および、学会発表に関連させながら述べる。論文番号、発表番号は、主な発表論文等における、雑誌論文の番号と、学会発表の番号である。

論文 1. 修士課程の大学院生の D. Cerzo との共同研究が出版された。主たる部分の研究は、2008 年度のものである。本研究は、非原

始的な、 Q -多項式型スキームの、例外的なパラメタとして残っていた、 $d=4$ の場合が存在しないことを示したものである。本研究代表者による、二つの Q -多項式型スキームの構造を持つ場合の分類結果を用いて、整数条件が成り立つことを示し、パラメタの整数条件から、非存在を示している。この結果により、 $d=6$ の場合だけが例外として残されることとなったが、その後、H. Tanaka-R. Tanaka により、 $d=6$ の場合の非存在が示され、 Q -多項式型スキームの場合、 P -多項式型スキームの場合の双対条件である、以下の結果が示されたことになる。「非原始的な Q -多項式型スキームは、dual-bipartite または、dual-antipodal である。」

論文 2. 平行四辺形を持たない距離正則グラフが直径 2 の完全正則な強閉部分グラフをもてば、ほとんど、 Q -多項式型であることを示した結果である。条件が十分こなれていないともいえるが、実は、この結果は、Completely Regular Clique Graph で、Thin なものの分類に大きく関わる結果であることが、あとでわかることになる。強閉部分グラフをサポートに持つに特別なベクトルの存在と、 Q -多項式の関係を示したものと、重要である。

発表 1. アメリカ数学会の東地域での Special Session での講演で、論文 2 の結果など、完全正則符号である、強閉部分グラフについて、発表した。アメリカの研究者およびヨーロッパの研究者と久しぶりに交流をはかり、進捗状況を確認することができた。

論文 3. 共著者は、有限幾何および、Incidence Geometry の世界で最も活躍しているベルギーの研究者である。その研究の中から生まれた問題について、本研究が答えたことから始まった、共同研究の成果である。距離正則グラフとは限らない、グラフのなかの良い、完全正則グラフとして、Intriguing Sets を定義し、それが十分多く存在するときには、距離正則や、強正則となることも示したこの研究も、その後の、Completely Regular Clique Graphs の研究へと結びついている。距離正則より正則性の低いグラフのなかで、完全正則の性質を見直すことができたことは、大きなメリットである。

発表 2. 大学から与えられた、特別研究期間歴史のある British Combinatorial Conference に初めて参加し、交流が乏しかった、英国やヨーロッパの研究者、および、少し距離のある、関連分野の研究者と広く研究交流を行うことができた。そのときの発表では、Terwilliger Algebra を部分集合に関するものに拡張し、応用が広がったことをまず話し、その中の中心的な定理である、tight ならば thin について紹介すると共

に、他に、thin を導く、手法をまとめて、提示した。この形では、論文として発表していないが、この時期に、かなり大部の講義録を作成した。証明も論文として発表する少し手前の状況まで精査して書き上げており、その後の研究において、非常に有効なものとなった。

発表 3. 交流のあった河北師範大学での研究集会で、表現グラフの一部がパスになる場合に、 Q -多項式型となることの結果を紹介した。これは、前年度の特別研究期間に続けていたプロジェクトの一つである。論文として投稿できるレベルにまで、書き上げてあるが、一つのケースのパラメタが残っているために、論文としては発表していない。十分な結果ではあるが、現在は、研究の進展が異なる方向であるので、中断している。

論文 4. スペインの研究者グループから質問のメールが回ってきたことから、研究が始まった。その問題は、すでに、2002年に北海道大学で開かれた、代数学シンポジウムで本研究者が発表していたものだった。しかし、一つの結果として発表し、証明も残っておらず、むしろ、論文として発表もしていなかった。一番の問題は、その問題が簡単に解けることに満足し、その結果の重要性や発展性に注目できていなかった点である。一日で証明を書き上げ、他の結果ともあわせて、共著の論文として発表した。知識の基盤が異なり、コミュニケーションが困難であり、何度も説明をする場面もあったが、近隣他分野との研究交流ができたこと、さらに、大きな視点が与えられたこと、25年前に本研究者の勉強のためにまとめた、手書きの Terwilliger の講義録の内容が活用できたことなど、収穫は計り知れないものであった。

発表 4. 上海交通大学で開催された国際研究集会にフルに参加することができ、アジアの研究者を中心に、広く世界から集まった研究者、特に、個人的な交流が乏しい、研究論文しか知らない研究者と、時間をかけて、話す事ができたことは、非常に有意義だった。もう、30年も前に本研究者が行っていた研究と関連する問題を研究している南米の研究者とも交流をもつ事ができた。ここでは、新しい研究の起点ともなった、Edge-Distance-Regular Graph が Distance-Regular であるという結果 (論文 4) からはじめ、Completely Regular Clique のパラメタに関する結果、および、Distance-Semiregular Graph との関係についての結果の紹介を行った。

論文 5. 論文 4 を書き上げている途中で、edge によって、完全正則符号のパラメタが変化しうることの問題に行きつき、共同研究とは別に研究。ほどなく、以前一般化した、

Terwilliger 代数の表現に、Terwilliger の講義録の内容を拡張すれば、結果を得られることがわかり、同時に、辺よりもっと一般的な状況を考えて、以前から時々考えていたクリークに拡張することから、Completely Regular Clique Graph の概念に行きついた。そのように、表現すると、既に、いろいろな所で研究されている、Delsarte Clique Graph や、Geometric Distance-Regular Graph の拡張になっていることがすぐに見て取れ、研究全体の視野が急激に広がった。このような距離正則グラフなら研究しやすいと 30 年ほど前に提示した、Distance-Semiregular Graph がどのようにして、生じるかも明確に認識できるようになり、将来への展望が啓けた瞬間であった。

発表 5. 論文 5 の内容と、その後の発展すべき方向、解決すべき問題については、2013 年 1 月に金沢大学の組合せ論セミナーで話し、非常に高い評価を得ていたが、公開の場所で話したのは、この神戸学院大学がはじめてである。30 分講演であったため、伝えられたことは、限界があったと思われるが、発表に際して、結果を整理することもでき、研究の次の展開の計画を明確にする事ができると共に、石川工業高等専門学校の研究者との議論を通して、共同研究も途につくことができた。

全体として、今からふり返ると、背景の認識、研究目的の要旨は、非常に的確で、この科学研究費を受給したときと、現在の立ち位置は殆ど変化していない。しかし、具体的な問題の部分は、かなり変化している。そこが明確になったことが、この研究の一番の成果だと言うことができる。

また、特別研究期間を得た、2009 年度にじっくり蓄積したことが、そのあと、継続的に研究時間を十分には確保出来ない期間においても、研究を続けることができたことに大きく寄与していることを確認する事ができた。

十分に問題が絞れていなかったこの時期にも、科学研究費を受給できたことが、現在の成果につながった大きな理由であることを感謝をもって、確認することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① D. Cerzo, and H. Suzuki, Non-existence of Imprimitve Q -polynomial Schemes of Exceptional Type with $d = 4$, European Journal of Combinatorics 30 (2009), 674-681. (査読有)
- ② H. Suzuki, Parallelogram-Free Distance-Regular Graphs Having Completely Regular Strongly Regular

Subgraphs, Journal of Algebraic Combinatorics 30 (2009), 401-413. (査読有)

- ③ B. De Bruyn, H. Suzuki, Intriguing Sets of Vertices of Regular Graphs, Graphs and Combinatorics 26 (2010), 629 - 646. (査読有)
- ④ M. Camara, C. Dalfo, C. Delorme, M. A. Fiol and H. Suzuki, Edge-Distance-Regular Graphs, Journal Combinatorial Theory, Series A, 120 (2013), 1057-1067. (査読有)
- ⑤ H. Suzuki, Completely Regular Clique Graph, Journal of Algebraic Combinatorics, to appear. (査読有)

[学会発表] (計 5 件)

- ① H. Suzuki, Distance-Regular Graphs Having Certain Completely Regular Subgraphs, American Mathematical Society, 2009, Spring Eastern Section Meeting, 2009.4.26, Worcester, MA, U.S.A.
- ② H. Suzuki, The Terwilliger Algebra of a Polynomial Space, 22nd British Combinatorial Conference, 2009.7.7, University of St. Andrews, U.K.
- ③ H. Suzuki, On Representation Diagrams of a Distance-Regular Graph, Workshop on Algebraic Combinatorics, 2010.11.27, 河北師範大学 (中国).
- ④ H. Suzuki, Edge-distance-regular graphs are distance-regular, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics, 2012.8.21, Shanghai Jiao Tong University.
- ⑤ H. Suzuki, Completely Regular Clique Graphs and Thin Distance-Regular Graphs, 代数的組合せ論ミニ集会, 2014.3.7, 神戸学院大学ポートアイランドキャンパス.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

<http://subsite.icu.ac.jp/people/hsuzuki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 寛 (SUZUKI, Hiroshi)

国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号：10135767

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし