様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　6　月　4　日現在

機関番号：３２６２１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００９～２０１２
課題番号：21540024
研究課題名（和文）有限群の表現、指標和、および、その応用

研究課題名（英文）　Representation of finite groups, character sums, and their applications
研究代表者
篠田　健一（SHINODA　KEN-ICHI）
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：　２００５３７１２

研究成果の概要（和文）：ガウス和はガウスにより約 200 年前に考察された素数に依存する和でその値も見事に求められた。この和は、０からその素数未満までの和なので有限素体上の和と考えることが出来る。この有限素体を拡張する試みは様々になされてきた。この研究では任意の有限群に対しそのガウス和を定義し、最も基本的な有限群である対称群などを含む複素鏡映群についてその値を具体的に求めた。

研究成果の概要（英文）：Gauss sum, which depends on a prime p, was considered by F. Gauss about 200 years ago and he determined the value beautifully. Since the sum is over 0 to p-1, it can be regarded as a sum over a finite prime field. There has been many works which extend the results. In this research, we defined a Gauss sum for arbitrary finite groups, and determined its value explicitly, particularly for basic finite groups, like symmetric groups and some complex reflection groups.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	800, 000	240, 000	1, 040, 000
2010 年度	500, 000	150, 000	650, 000
2011 年度	500, 000	150, 000	650, 000
2012 年度	600, 000	180, 000	780, 000
総　計	2, 400, 000	720, 000	3, 120, 000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：有限群の表現論、ガウス和、指標和

１．研究開始当初の背景

（1）ガウス和は 19 世紀初頭にガウスにより研究された。整数論の研究から必然的に出てきたものである。この和は有限素体上の和とも考えられるので、有限体の場合に Davenport-Hasse により拡張された（1935）。ついで幾つかの試みがあったが、有限体以外で拡張に成功したのは近藤武（1963）の有限体上の一般線型群のガウス和をすべての既約表現に対して求めた仕事である。1990 年代には D. S. Kim を中心として、有限体上の古典群の次数が 1 の既約表現に対するガウ

ス和が求めらた。

（2）これらの近藤からの仕事の流れの中で斉藤―篠田（2000）は有限簡約代数群のガウス和は Deligne-Lusztig 理論の中で考えられべきものであることを示し、実際に4次斜交群、G２型 Chevalley 群の unipotent 既約指標について、その値が求められることを示した。

（3）ガウス和の応用として有名なものは Andre Weil による現在は Weil 型多項式と呼ばれる多項式の有限体上の解の個数の公式で、有名な Weil 予想に繋がった（1949）。M. Kuroda は Weil 型多項式の解の個数を求める公式の非可換化を目指し、有限体上の 2 次正方行列の平方和の場合に、これを求めた（1997）。

２．研究の目的

（1）背景で述べたように有限簡約代数群の場合のガウス和についてはかなり良く分かってきた。では一般の有限群については、どのようなことが成り立つかは興味深い問題である。対象を有限簡約代数群から一般の有限群に拡張して、その性質、値を調べる。

（2）有限群の既約表現に付随するガウス和を調べる際、実は有限群の群環を考えている。したがって、群環からさらに一般の環の場合に拡張できることが期待されるので、特に対称群などの q-変形である Hecke 環について考察する。

（3）有限体上のガウス和は、有限体上のガンマ関数とみなすことができる。それゆえに重要なのだが、ガンマ関数の性質で大切なものにゼータ関数との積が満たす関数等式がある。これらの可能性について研究する。

（4）ガウス和の応用について研究する。特に、上の１．（3）で述べた M. Kuroda の結果の拡張などを調べる。

３．研究の方法

（1）普通の数学の研究と特に変わったものはない。すなわち、様々なデータの収集、これには一部計算機を使用する、既発表論文の検索、理解、ついで仮説をたて、例で検証し、証明をする、ということである。

（2）公開されている計算機ソフト GAP は、データの収集に大変有益であった。

４．研究成果

（1）有限群Ｇのモジュラー表現 ρ と複素数体上の表現Ｒ　に対し和

$$\sum \mathrm{Tr}\big(R(x)\big)e(\mathrm{Tr}(\rho(x))$$

をρ とＲ に付随した Ｇ　のガウス和、と呼ぶことにする。ただし和は Ｇ のすべての元 ｘ の上を渡り、Tr は行列の対角和（トレース)、ｅ はモジュラー表現 ρ が実現されている有限体の非自明な加法指標とする。以後、ρ は固定し、すべての既約指標につき、この値を求めることを問題とする。

なおこの定義は有限古典群に対してその自然な実現をρ とすると、近藤や Kim の研究したガウス和となるので、自然な拡張となっている。

さて有限群としては、対称群を部分群として含む複素鏡映群　G(m,1,n) を考える。m=1 のとき、n 次対称群でもある。モジュラー表現としてはｎ次の行列表現をとるのだが、通常の行列表現は複素数体上で考えるので、これを有限体上にするため、p-1 が ｍ の倍数である素数ｐをとり１の原始ｍ乗根をｐ元体からとるのである。すると G(m,1,n)のモジュラー表現が得られる。対称群の場合には置換表現に他ならない。

この場合に G(m,1,n)のすべての既約指標に対するガウス和を具体的に求めた。簡単のためｎ次対称群の場合に結果を述べると、ヤング図形 λ に対応する既約指標に対するガウス和は次のようになる。

$$n!\sum h(\mu)^{-1}(\zeta-1)^{|\mu|}$$

ここで μ は λ の部分図形で $\lambda-\mu$ が水平帯(horizontal strip)となるものを動き、$h(\mu)$ は μ の各成分に対するフックの長さすべての積、ζ は複素数の１の原始ｍ乗根である。また $|\mu|$ は μ のすべての成分の総数を表す。この式はガウス和が、ある部分群とその既約表現の組の集まりで定まることを示している。

G(m,1,n)の場合も表現の部分図形のように、ある部分群とその表現の組がガウス和を定めるという式が得られる。

証明には不変式論を使う。既約指標の全体のなす環が無限変数多項式環の不変式環と同型であることを用いるのである。このことは m=1 の場合には Frobenius により証明された古典的な結果であり、一般のｍにたいしては Specht による。

（2）G(m,1,n)は m=1 のときは n 次対称群、すなわちＡ型ワイル群、m=2 のときはｎ次Ｂ型ワイル群である。残りの有限ワイル群Ｗについてもすべての既約指標に対するガウス和を求めた。Ｄ型については Clifford の定理を応用しＢ型から導いた。因みに同じ方法で対称群から交代群のガウス和を求めることが出来る。

モジュラー表現は自然な鏡映表現とし、係数をｐ元よりなる有限体の元とみなす。

Ｆ，Ｇ 型は手計算で行ったが、Ｅ型についてはＧＡＰの中のＣＨＥＶＩＥを使った。－１

が W の元であるときには$\chi(-1)=\chi(1)$ または$\chi(-1)=-\chi(1)$の何れかによりガウス和の値は、実数または純虚数となる。ここでχ は考えている既約指標である。このことは、そもそものガウス和が有する性質の拡張とみなすことができる。しかもワイル群のガウス和は

$$y=\zeta+\zeta^{-1}-2=2(\mathrm{Re}(\zeta)-1),$$
$$w=\zeta-\zeta^{-1}=2i\,\mathrm{Im}(\zeta)$$

の多項式として表すことが出来る。ここで$\mathrm{Re}(\zeta)$はζの実部、$\mathrm{Im}(\zeta)$はζの虚部である。さらに詳しく$\chi(-1)=\chi(1)$のときは y の多項式、$\chi(-1)=-\chi(1)$のときはガウス和を w で割ると y の多項式で、E_8型の特殊な二つの場合を除き、係数はすべて非負整数という著しい性質を持つ。

(3) 発表はしていないが、Mathieu 群などの有限単純群の幾つかの既約指標について、そのガウス和を計算した。しかし、何らかの統一的な性質を見出すには至っていない。

また、対称群の場合のように、部分群とその既約表現のある列が、ガウス和を定めていると思われるが、この点についてもまだ進展はしていない。今後の課題である。

(4) 五味靖はＡ型 Hecke 環について、そのガウス和の類似物について構成することに成功した。それは（１）で得られた結果のｑ―類似とも呼ぶべきもので、組み合わせ論の諸結果や五味自身がすでに研究したマルコフ・トレースとも関係する極めて興味深い結果である。他の型に対して拡張することも十分に期待できる。

ただ問題は、この結果は得られたガウス和の類似であって、定義のｑ―類似から得られた結果ではない、ということである。つまり、環の場合には他の定義の存在を示唆しているようにも思える。大きな課題である。

(4) ゼータ関数や関数等式については、一般線型群の場合に Curtis-Shinoda により考察がなされた (2004)。このことを含め、他の有限簡約代数群に対してガウス和を完全に求めることは、未解決な問題である。この間の研究で特殊線型群については、そのガウス和の具体形につき、予想がたち、ほぼ証明も終わった。発表準備中である。

(5) ガウス和の応用として行列方程式の解の個数について、考察を行った。

具体的には

$$X_1^2+X_2^2+\cdots+X_m^2=B$$

という形の行列方程式を考えた。ここでＢは与えられた行列である。X_iが有限体上の２次行列の場合は Kuroda により、考察されている。したがって有限体上の対称行列の場合により高次の結果も求めて研究を行った。

Kuroda の方法がこの場合も応用できる。求める個数を$N(B,m)$とおくと簡単な計算から

$$\sqrt{q}^{n(n+1)}N(B,m)=\sum g_n(A)^m e\left(-\mathrm{Tr}(AB)\right)$$

であることが分かる。ここで和はすべてのｎ次対称行列を動き、

$$g_{n(A)}=\sum e(\mathrm{Tr}(AX^2)$$

である。ここでもＸはすべてのｎ次対称行列を動き e は考えている有限体の非自明な加法指標である。$g_n(A)$ はガウス和の類似であるが、対称行列全体のなす空間Λ_n上の二次形式である。Λ_nをこの二次形式の同値類により類別し、その各同値類で次の和

$$\sum e(-\mathrm{Tr}(AB))$$

を考察すればよい。

しかし、次数が３次以上の時は、大変困難で２次の場合のみ閉じた結果を得ることが出来た。

結果はＢの標準形に依存する。標準形にしたときΛ_nもまた、標準形に移す正則行列により変換されるが、有限体上の場合、対称行列は直交行列により対角化できる、という実数体上成り立つ命題は真ではない。このため、より個別に考える必要があるが次の結果を得ることが出来た。

Ｂが対角化でき固有値が Frobenius 写像によるベキの像で与えられるときに、Λ_nが変換される先が面白い形をしていることに気づき、それを証明した。Λ_nのあるｑ-形式と考えることができる。

またＢの標準形への変換というところが、Kuroda の場合と異なるところである。

Ｂが
① スカラー行列のとき、
② 考えている有限体で対角化できるとき、
③ 対角化不可能の時、
④ 拡大体で対角化できるとき、

の４つの場合に分けてそれぞれ考察する。④の場合が上で述べたΛ_2のｑ-形式が現われる場合である。

具体的な結果は省略する。

有限群のガウス和との関係を期待したのだが、残念ながら有限体のガウス和で計算をすることができた。

有限群のガウス和と直接の関係は無いのかもしれないが、Λ_n $(n>2)$について考察することも、難しいけれど興味深い課題である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Ma. N. M. Abara and Ken-ichi Shinoda, Number of solutions of equations of Weil type on finite symmetric matrices, Linear Algebra and its Applications,

vol.438(2013), pp.4322-4334, 査読有

② Yasushi Gomi, Taiki Maeda and Ken-ichi Shinoda, Gauss sums on finite groups, Tokyo J. Mathematics, vol. 35 (2012), pp.165-179, 査読有

〔学会発表〕(計４件)

① Ken-ichi Shinoda, Gauss sums on finite reductive groups and character sums, The 55th KPPY Combinatorics Seminar, 2013年3月23日, Yeungnam University, Korea

② Ken-ichi Shinoda, Gauss sums on finite groups and Hecke algebras, Conference on Representation Theory of Chevalley Groups and Related Topics, 2012年3月12日,名古屋大学

③ Ken-ichi Shinoda, Characters of endomorphism algebras of Gelfand - Graev representations, Shanghai workshop on representation theory, 2011年12月10日, East China Normal Univ., PRC

④ 篠田健一, Gauss sums on finite groups, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学

６．研究組織

(1)研究代表者

篠田　健一 (SHINODA KEN-ICHI)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：20053712

(2)研究分担者

中島　俊樹 (NAKASHIMA TOSHIKI)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：60243193

五味　靖 (GOMI YASUSHI)
上智大学・理工学部・准教授
研究者番号：50276515