

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 15 日現在

機関番号：34419
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540029
 研究課題名（和文） フォックス関数とゼータ関数

研究課題名（英文） Fox functions and zeta-functions

研究代表者

金光 滋 (KANEMITU SHIGERU)
 近畿大学・産業理工学部・教授

研究者番号：60117091

研究成果の概要（和文）：ゼータ関数の関数等式に同値なすべての等式をフォックス H-関数の範囲で書き出し、これまでに蓄積されて来た膨大な等式を同定すると共に、新しい有用な式を見出して、数論を含む数学一般、自然科学への応用を目指すことが目的です。プラナの和公式、短区間指標和の公式、数論的フーリエ級数の等式をモジュラー関係式として確立できることを示しました。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of the present research is to locate all the identities that have been assembled in the last 150 years after Riemann, equivalent to the functional equation for a wide class of zeta-functions in terms of Fox H-functions and by locating them in terms of the Meijer G-functions, to find new identities that are useful not only in mathematics but also in other scientific disciplines. In the year 2011, we were able to accomplish this task in the following setting: the origin of Plana's summation formula, the formula for short interval character sums and arithmetical Fourier series

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：整数論・特殊関数

科研費の分科・細目：数物

キーワード：ゼータ関数，関数等式，モジュラー関係式，フーリエ級数，超幾何級数

1. 研究開始当初の背景

それまで 20 世紀の特殊関数は、ベッセル関数であり、21 世紀は超幾何関数であろうという位の感触しかありませんでしたが、研究開始段階でメルンバーンズ積分を多重ガンマ因子の商の場合に考察することが、当時進

行中の大統一理論を胚胎するもとなつたと思われまふ。ただ、文献中では、最も有名なエルデリーの「高等特殊関数」でも H-関数というより、メルンバーンズ積分の名で呼ばれており、さらに、最近のパリス-カミンスキ「漸近式とメルンバーンズ積分」も内

容は、H-関数でありながら、その名称は、p. 63 に一度出てくるだけであり、統計等への応用を除き、余り注目されておりました。1978年頃に行ないました研究で、マイヤーG-関数が出てまいりましたが、恐らく、あまり役に立たないものと考えて30年間放置しておいた次第です。

関数等式の両辺がゼータ関数の1次結合であるような「分岐型関数等式」に同値なモジュラー関係式を求めた論文において、30年間を超克して、ようやくある程度形が見えてまいりました。論文中ではエリザルデ等の行っている、ゼータ正規化の式を、マイヤーG-関数を用いて導出しております。また、前半では、1850年頃アイゼンシュタインが行なった研究をその後100年後に再び、オーベルヘッティングが行い、それが、エルデリーの書に載っていることを解明いたしました。関数等式を2回使うと、もとに戻りますが、それを認識しないと、もとに戻っていることが分からないという典型的な例であります。有名なチャウラセルバーク（積分）公式も類似の歴史をもち、150年前にマルムステンが研究し、20世紀初めにランダウが特殊な場合を、最後にチャウラセルバークが50年後に一般的な形で叙述しました。

この段階で既に、超幾何関数の範囲では、すべてを包括しきれないという感触がありましたので、本科学研究費補助金の課題は、「フォックス関数とゼータ関数」といたしました。

2. 研究の目的

本研究では、多重ガンマ因子の場合に「関数等式に同値な等式」をすべて求め、その成果を特殊関数の新展開に応用し、特殊関数の有用性を通して数学の実用性をアピールすることです。これまでの10年間の研究により、当初、超幾何関数の枠内で納まると考え

ておりましたものが、その枠をはみ出すものが見つかったことから、実は、「フォックスH-関数」の枠が正しいものと予想でき、そのintrinsicな性質の中に、ゼータ関数の性質が反映されており、したがって、H-関数による等式を書き出してしまえば、これまで未知であったゼータ関数の性質が自然に明らかになるという道が開けてまいります。すなわち、リーマン以来150年間に渡って精力的に研究されてきた様々な等式（および漸近式）がどの（H-関数の特殊な場合であるマイヤーG-関数等による）具体例に当たるかを同定して行けば、労せずして未知の有用な等式を見出すことができ、最終的には、ゼータ関数の海のチャートを作成することが可能となることが期待されます。それらは当然、特殊関数論の新等式になり、特殊関数の有用性を通して実用性が期待されます。

3. 研究の方法

数学研究に際し、他分野の実験に当たるものが、直接参加型の（集中）セミナーであります。これまでの経験で、セミナーにおけるディスカッションのほんの些細なコメントから重大なヒントを得たことが数限りなくございます。聞いたときには、何の関係もなく思えたものが、次第に発酵して、大きなアイデアの基になったと考えます。平成17年—19年の科研費補助金におきましても、初年度に、数人の世界のトップ研究者に集まって頂き、集中的にディスカッションを行なえましたがそれがそれ以降の研究の進展に陰に陽に非常に効果的でありました。

4. 研究成果

研究成果概要に詳しく述べました通り、目指しておりました、モジュラー関係式の具体例が数多く得られました。

ガンマ因子を分母として他方に移した形

のものに、プロセスガンマ因子をかけて加工するタイプのものです。右辺のガンマ因子はかなり複雑なものとなりますから、そのブルムウィッチ積分を具体的に既知の特殊関数で表示すること自体が挑戦的な問題になります。とくに、コシュリヤコーフ、セーガル等の研究に現れておりまして、平成 18 年頃の研究代表者の論文で取り扱っております。

ブルムウィッチ積分がガンマ因子の極を分離していない場合、積分路を移動して、途中の極における留数の計算等。

加工した後の特殊関数級数において、当該の特殊関数の第 1 項による近似として得られるタイプ。多くの文献では、それを誤差項の評価としておこなっているため、見通しがよくない。とくに近似関数等式の扱いはこのタイプに属します。

関数等式を何度も用いるタイプのもの—2 回使えば元に戻るはずですが、大体において別物になっております。

共同研究者塚田春雄氏との 10 年余に渡る共同研究において進展してまいりました、「ゼータ関数論三部作」の第 1 巻「Modular relation supremacy」を 2012 年中にワールドサイエンティフィック社より出版致します。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 16 件)

- ① K. Chakraborty, S. Kanemitsu and H. Tsukada, On arithmetical Fourier series and the modular relation, Kyushu J. Math., to appear (2012)、査読有
- ② S. Kanemitsu, J. Urbanowicz and N. -L. Wang, On some new congruences for generalized Bernoulli numbers, Acta Arith., to appear (2011)、査読有
- ③ K. Takahashi, T. Hasegawa, G. Hirano, T. Kaida S. Kanemitsu and H. Tsukada, On

the Weber-Fechner law, Siaulai Math. Sem. 6 (2011)、査読有、85-91

- ④ H. -L. Li, S. Kanemitsu and X. -H. Wang, Plana's summation formula as a modular relation and applications, to appear Int. Transf. Special Functions (2011), electron. published in May、査読有
- ⑤ S. Kanemitsu, J. Ma and Y. Tanigawa, Arithmetical identities and zeta-functions, Math. Nachr. 284 (2011), 査読有、287-297
- ⑥ K. Chakraborty, S. Kanemitsu and X. -H. Wang, The modular relation and the Euler digamma function, Kyushu J. Math. 65 (2011)、査読有、39-53
- ⑦ S. Kanemitsu, H. -L. Li and N. -L. Wang, Weighted short-interval character sums, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011)、査読有、1521-1532
- ⑧ S. Kanemitsu, H. -L. Li and M. Hashimoto, Structural elucidation of Eisenstein's formula, Sci. China. 53 (2010)、査読有、2341-2350
- ⑨ S. Kanemitsu and H. Tsukada, Crystal symmetry viewed as zeta symmetry II, in "The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences" ed. by K. Alladi, J. Klauder, C. R. Rao, Springer 2010、査読有、275-292
- ⑩ K. Chakraborty, S. Kanemitsu, and H. -L. Li, On the values of a class of Dirichlet series at rational arguments, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010)、査読有、1223-1230
- ⑪ S. Kanemitsu, A. Laurinchikas and J. Ma Square-free integers as ideal norms, Acta Math. Sinica, 26 (2010)、査読有、621-628
- ⑫ K. Chakraborty, S. Kanemitsu and T. Kuzumaki Finite expressions for higher derivatives of the Dirichlet L -function and the Deninger R -function, Hardy-Ramanujan J. 32 (2009)、査読有、38-53
- ⑬ S. Kanemitsu and T. Kuzumaki, Transformation formulas for Lambert series, Siaulai Math. Sem., 4 (2009)、査読有、105-123

⑭ K. Chakraborty, S. Kanemitsu, J. -H. Li and X. -H. Wang Manifestations of the Parseval identity, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85 No. 9 (2009)、査読有、149-154

⑮ M Hashimoto, S. Kanemitsu and H. -L. Li, Examples of the Hurwitz transform, J. Math. Soc. Japan 61 (2009)、査読有、651-660

⑯ S. Kanemitsu, J. Ma and W. -P. Zhang, On the discrete mean value of the product of two Dirichlet L-functions, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 79 (2009)、査読有、149-164

[学会発表] (計 8 件)

① 金光滋 Some applications of circulant matrices 第 6 回日中数論セミナー 上海交通大学 平成 23 年 8 月 17 日 上海

② 金光滋 On the Weber-Fechner law 渭南師範学院数学系講演会 平成 23 年 3 月 26 日 中国・渭南

③ 金光滋 Iterates of functions, RH and the Weber-Fechner law 商洛師範学院数学系講演会 平成 23 年 3 月 23 日 中国, 商洛

④ 金光滋 Exhausting the two principles in number theory アブダスサラム数理科学学校 GC Univ, Lahore セミナー 平成 23 年 2 月 16 日、パキスタン

⑤ 金光滋 On multiplicative functions associated with a pair of cusp forms アブダスサラム数理科学学校 GC Univ, Lahore における第 5 回 21 世紀数学国際会議 平成 23 年 2 月 10 日 パキスタン

⑥ 金光滋 L'estro armonico del circolo di Euler-Gauss-Dirichlet-Riemann カトマンズ大学における CIMPA School 平成 22 年 7 月 28 日 ネパール

⑦ 金光滋 The Riemann zeta-function and the Karman vortex street 渭南師範学院数学系セミナー 平成 22 年 3 月 18 日 中国, 渭南

[図書] (計 3 件)

① 金光滋, 数論未解決問題の事典, 朝倉書店 2010 (原著 R. K. Guy, Unsolved problems in number theory の翻訳), 2010, 414 ページ

② S. Kanemitsu and J. -Y. Liu, Dreaming in dreams-Proc. of the 4th China-Japan Seminar on number theory held at Kinki University, Higashi-osaka, Japan, World Sci. 2009, pp. 278, 2009

③ K. Chakraborty, S. Kanemitsu and H. Tsukada Vistas of special functions II, World Sci. 2009, pp. 278, 2009

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金光 滋 (KANEMITSU SHIGERU)
近畿大学・産業理工学部・教授
研究者番号: 60117091

(2) 研究分担者

塚田 春雄 (TSUKADA HARUO)
近畿大学・産業理工学部・教授
研究者番号: 00257790

(3) 連携研究者

谷川 好男 (TANIGAWA YOSHIO)
名古屋大学大学院・
多元数理科学研究科・准教授
研究者番号: 50109261