

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2012

課題番号：21540031

研究課題名（和文）有限群と代数の表現のカテゴリ一論的研究

研究課題名（英文）A study for the categorical representation theory for finite groups and algebra

研究代表者

小田 文仁 (ODA FUMIHITO)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：00332007

研究成果の概要（和文）：

- (1) 任意の有限群とある条件を満たす部分群族は、カテゴリと可換環を誘導する。その環は一般バーンサイド環と呼ばれている。ほとんど実例が知られていなかった。有理整数の素数  $p$  による局所環係数の場合に新しい族を紹介した。その族はある条件をみたす  $p$ -根基部分群の正規化群全体からなる。ある準同型の核とその環の単位元とべき等元を調べた。その環の単位元が与える一般指標の階数と部分群の族が与える単体的複体のオイラー標数が一致するという結果が証明される。
- (2) Bouc 氏と Thevenaz 氏により証明された  $p$ -バイセット関手の定理を用いて、有限  $p$ -群について、そのデイド群、斜バーンサイド環、ドリンフェルトダブルの表現環の間に関係があることを示した。
- (3) バーンサイド丹原関手にドレス構成を応用することにより任意の有限群の斜バーンサイド環の構成法を示す。

研究成果の概要（英文）：

- (1) For a finite group and a certain family of subgroups of the group induce a category and a commutative ring. The ring is called generalized Burnside ring. So far only a few examples of such families of subgroups have been examined. We introduced a new family in the case when the coefficient ring is the localization of the rational integers at any prime. The family consists of normalizers of certain  $p$ -radical subgroups. We investigate the kernel of certain homomorphism and the units and primitive idempotents of the ring. It is shown that the degree of the generalized character afforded by the multiplicative identity (unit) of the ring coincides with the Euler characteristic of the order complex of the family of subgroups of the group.
- (2) By using a theorem of  $p$ -biset functor obtained by Bouc and Thevenaz, we have a relationship between the Dade group, crossed Burnside ring and rational representation ring of Drinfeld double for a  $p$ -group.
- (3) We described the construction of the crossed Burnside ring for a finite group via the Dress construction applied to the Burnside Tambara functor.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：有限群論，表現論，カテゴリー論，圏論

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 1990年代の初めころに導入された一般バーンサイド環の理論は、任意の有限群と、ある性質(素数  $p$  に依存することから  $(C)p$  と表記される)を満たす部分群の族を与える圏から一意的に構成される可換環である。このとき出現する条件  $(C)p$  は、カテゴリー論における余等化 (coequalizer) の存在条件を翻訳したものである。有限群論の言葉に翻訳されたその条件は、有限群論的に明確な解釈が得られてはいない。しかし、その条件を満たすことから得られる一般バーンサイド環は、対称群の場合には、その表現環を与えることや、コホモロジカルシロー定理等に代表される、部分群束のオイラー標数に関わる情報を与えること等、有限群の表現論に関係する事実を導出することが知られていた。有限群論的にはあまり自然な条件ではないため、有限群論的な方向からの研究は全く着手されていなかった。一方、有限群のモジュラー表現論において、2000年代に入り重要視されてきたものの一つにフュージョンシステムと呼ばれるカテゴリーがある。ある群の部分群族を対象にする点は、一般バーンサイド環と同様であるが、射が異なる。 $p$ -根基部分群の族が、モジュラー表現論やフュージョンシステムで重要であることは、以前からよく知られていた。特に、中心的  $p$ -部分群の族が一般バーンサイド環を導くことは、研究代表者が最近指摘していた。様々な部分群族のオイラー標数とモジュラー表現論との関わりは、澤辺正人氏による先行研究があった。澤辺氏の研究対象と一般バーンサイド環の関係があることは想像されていたが、一般バーンサイド環の例があまり知られていなかった。

(2) 斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring) は 2000年代の初めに導入された環である。有限群の表現論における重要な結果のひとつに誘導定理と呼ばれる結果がある。その定理の証明のカテゴリー論的な簡約化のために、グリーンやドレス等が導入した、 $G$ -関手、マッキー関手の理論がある。特に、ドレスが導入した、共変関手と反変関手の対として導入したマッキー関手による手法は、その後ドレス構成法と呼ばれた。 $G$ -集合を与える方法であった。この手法を  $G$ -集合であり、モノイドの構造も考慮した一般化を行うことにより、新しい環が得られることが指摘された。それが、斜バーンサイド環である。任意のグリーン関手が、斜バーンサイド環の類似の環を与えることが知られていたが、さらに、条件を強めた丹原関手に関する結果は知

られていなかった。

### 2. 研究の目的

(1) 一般バーンサイド環を与える部分群束の例を見つけること。

(2) 一般バーンサイド環を与える新たな部分群束についてその性質を調べること。

(3) バイセット関手を用いて、斜バーンサイド環と有限群の量子ダブルとの関係を明らかにすること。

(4) 丹原関手と斜バーンサイド環との関係を明らかにすること。

### 3. 研究の方法

関連する文献を調査し、適用可能な命題を蓄積する。小さな有限群について GAP を用いて、一般バーンサイド環を与えるための条件を満たす部分群束を特定するための計算を行い、そのデータを蓄積する。国内や国外で行われている本研究に近いトピックの研究集会に参加し、有限群論、有限群の表現論、代数的組合せ論、頂点作用素代数等の専門家に意見交換等を行う。北海道大学で行われている有限群論に関するセミナーに参加し、新たな知見の報告、結果に関する意見交換等を行う。

### 4. 研究成果

(1) 一般に、 $p$ -根基部分群の族や中心的  $p$ -根基部分群の族が条件  $(C)p$  を満たさないことを、8次交代群で  $p=2$  の場合を例に挙げ指摘した。しかし、 $p$ -根基部分群の族やその部分族が、澤辺氏が発見した条件  $(P)$  と  $(W)$  を満たす場合に、その部分群族の任意の要素の正規化群全体がつくる部分群族については  $(C)p$  を満たすことがわかった。このとき、一般バーンサイド環の階数が計算できることがわかった。その階数の例として、標数  $p$  の Lie 型の有限群、Mathieu 群  $M_{24}$  で  $p=2$  のとき、Conway 群  $Co_1$ 、モンスター単純群  $M$  で  $p=2$  の場合の結果が得られた。

(2) 一般バーンサイド環の研究は、ゴースト環への単射環準同型写像を用いて行われることが多い。この単射環準同型写像が全単射であるための必要十分条件が、部分群族のすべての要素が自己正規化群である (この条件

を(SN)と書く)という結果が得られた。(SN)を満たす部分群族に対しては、バーンサイド環からの分裂全射が存在することがわかった。この定理の系として、バーンサイド環の部分加群としての直和分解が得られることがわかった。さらにその分解を得るための写像の核が完全に記述できることがわかった。さらにこの場合の一般バーンサイド環の単位元がメビウス関数を用いて完全に記述できること、さらに、その一般指標としての階数が、部分群族の単体的複体のオイラー標数を与えることがわかった。

(3) Bouc 氏と Thevenaz 氏により証明された有理数体上の  $p$ -バイセット関手間の短完全列にドレス構成を施すことにより、任意の有限  $p$ -群についてその斜バーンサイド環、ドリンフェルトダブルの表現環、いくつかの中心化群のデイド群の間に関係が存在することがわかった。応用として、 $p$ -群の斜バーンサイド環の階数がドリンフェルトダブルの表現環といくつかの中心化群のデイド群の階数の和で表現できることがわかった。

(4) バーンサイド丹原関手を用いた斜バーンサイド環の構成法をまとめた。バーンサイドグリーン関手の場合には、ドレス構成に用いる  $G$ -モノイドに条件は不要であったが、丹原関手の場合には、可換性が必要であることがわかった。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Fumihito Oda, Masato Sawabe, "A collection of subgroups for the generalized Burnside ring" *Advances in Mathematics* 査読有, Vol. 222. 307-317, (2009), <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2009.04.005>
- ② Fumihito Oda, "The Crossed Burnside Ring, the Drinfel'd Double, and the Dade Group of a  $p$ -Group" *Algebras and Representation Theory*, 査読有, Vol.13. 231-242(2010), DOI:10.1007/s10468-008-9117-2
- ③ Fumihito Oda, Tomoyuki Yoshida, "The crossed Burnside rings III : The Dress construction for a Tambara functor" *Journal of Algebra* 査読有, Vol. 327. 31-49, (2011), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.10.018>
- ④ Fumihito Oda, Masato Sawabe, "The

generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups" *Journal of Algebra* 査読有, Vol. 334. 219-231, (2011), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jalgebra.2011.02.004>

[学会発表] (計 9 件)

- ① 小田文仁, "A collection of subgroups for the generalized Burnside ring" 第 26 回代数的組合せ論シンポジウム, 遊学館 (山形県生涯学習センター) (2009).
- ② 小田文仁, "A collection of subgroups for the generalized Burnside ring" 第 21 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス (2009).
- ③ 小田文仁, "一般バーンサイド環のための新たな部分群族 II" 京都大学数理解析研究所短期共同研究有限群のコホモロジー論とその周辺, 信州大学全学教育機構 (2009).
- ④ 小田文仁, "The generalized Burnside rings normalizers of centric  $p$ -radical subgroups" *Gtoup Representation Theory and Related Topics*, スイス連邦工科大学ローザンヌ校 (2010).
- ⑤ 小田文仁, "丹原関手と斜バーンサイド環" 京都大学数理解析研究所短期共同研究「有限群のコホモロジー論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2011).
- ⑥ 小田文仁, "有限群のバーンサイド環とマッキー, グリーン, 丹原関手" 日本数学会 2011 年秋季総合分科会代数学分科会特別講演, 信州大学 (2011).
- ⑦ 小田文仁, "丹原関手に関する注意" 第 29 回代数的組合せ論シンポジウム, 弘前大学 (2012).
- ⑧ 小田文仁, "Green functors and representation rings of Drinfel'd double of finite group" 京都大学数理解析研究所短期共同研究「ホップ代数と量子群—応用の可能性」, 京都大学数理解析研究所 (2012).
- ⑨ 小田文仁, "On multiplicative induction" 京都大学数理解析研究所研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 京都大学数理解析研究所 (2013).

[図書] (計 1 件)

- ① 小田文仁 (編者) 京都大学数理解析研究所講究録 Vol. 1784, 「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究」 (2013)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小田 文仁 (ODA FUMIHITO)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：00332007