

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 10 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540033

研究課題名（和文） ガロワ埋め込みによる代数曲面の種々の構造の研究

研究課題名（英文） Study on the various structures of algebraic surfaces by Galois embeddings

研究代表者

吉原 久夫（YOSHIHARA HISAO）

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：60114807

研究成果の概要（和文）：

アーベル曲面がガロワ埋め込みをもつとき、その埋め込まれる射影空間の最小の次元が7であることを解明し、さらにそのようなアーベル曲面の構造は楕円曲線の直積であることも証明した。また、特異点をもつ平面曲線で種数が1のものについて、ガロワ点をもつ場合のガロワ群の決定をした。空間楕円曲線については、常にガロワ直線があり、それらの配置は四面体の6本の直線であり、ガロワ群はクラインの4元群であることも判明した。

研究成果の概要（英文）：

Suppose an abelian surface A has a Galois embedding. Then, what is the least number n such that A is embedded into the projective n -space? The answer is 7 and moreover such an abelian surface is isomorphic to $E \times E$, where E is an elliptic curve. We considered also the questions for curves. For the plane curve with genus 1 we found the Galois group when it has a Galois point, for the space elliptic curve we found it has always Galois lines.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学,代数学

キーワード：代数幾何学,ガロワ埋め込み,代数曲面,ガロワ群,分岐被覆

1. 研究開始当初の背景

小平次元の小さい代数曲面についてガロワ埋め込みがあるかどうか、またその場合には曲面の構造はどのような特徴をもつかは不明のものが多かった。また、曲線に関しても特異点を持つ場合のガロワ点関係の種々の研究や空間曲線に関するガロワ直線の研究は少なかった。

2. 研究の目的

- (1) アーベル曲面 S について、 S が n 次元射影空間に埋め込まれる最小の n は 4 であることが知られているが、ガロワ埋め込みとなる最小の n がいくつになり、その場合の曲面の特徴はどうかを調べる。
- (2) 有理曲面や bielliptic surface についてもガロワ埋め込みの問題を研究する。
- (3) 特異点をもつ平面曲線のガロワ点関係の

研究と非特異空間曲線のガロワ直線関係の研究を行う。

3. 研究の方法

- (1) すでにアーベル曲面がガロワ埋め込みを持つ場合はガロワ群は分かっているので実際に射影空間に埋め込んだときの最小の空間次元を決定する。
- (2) 有理曲面や bielliptic surface の自己同型群を求めて、それによる商空間が射影平面になるものを決定する。
- (3) 特異点をもつ平面曲線の場合、2通りの研究方法がある。1つは特異点の解析をして、それとのガロワ点の関係を調べる方法と、2つ目は特異点解消をして、空間非特異曲線として扱い、その場合のガロワ部分空間を考察するというものである。

4. 研究成果

- (1) アーベル曲面 S が n 次元射影空間にガロワ埋め込みされる、最小の n は 7 であることが判明した。しかもそのような S は楕円曲線 E があって、 $E \times E$ と同型でガロワ群は位数 8 の二面体群か、それと位数 2 の群の半直積であることが分かった。
- (2) Bielliptic surface は射影平面のガロワ被覆にならない、従ってガロワ埋め込みをもたない。また、射影平面のガロワ埋め込みは n 次ペロネーゼ埋め込みでガロワになるものを決定することであるが、これについては群が可換の場合だけ解決した。群構造は位数 n の巡回群の 2 個の直積である。
- (3) P^3 の楕円曲線について、正規に埋め込まれた、すべての楕円曲線はガロワ直線を持ち、そのガロワ群はクラインの 4 元群であり、ガロワ直線の配置は 4 面体の辺となる 6 本の直線の配置になることが判明した。
- (4) 平面曲線でその正規化が種数 1 のものに関して、すべてのガロワ群を決定した。特に、群が可換の場合には位数は 9 までしかなく、それらを実現する具体的な方程式まで求めた。
- (5) 平面有理曲線が尖点しか持たない場合にガロワ点をもつ曲線の特徴づけた。実はよく知られた $y^m = x^n$ の形のものしかないことが判明した。
- (6) 平面曲線で特異点の重複度が大きく、ガロワ点を持つ場合に、そのガロワ群の元の関数体への作用を具体的に書き表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

- ① H. Yoshihara, Galois lines for normal

elliptic space curves, II, Algebra Colloquium (in press) 査読有

- ② H. Kojima and T. Takahashi, Normal del Pezzo surface of rank one with log canonical singularities, Journal of Algebra, (in press) 査読有
- ③ S. Kondo, K3 and Enriques surfaces, Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, Fields Institute Communications Series, Springer (in press) 査読有
- ④ H. Tokunaga, Some sections on rational elliptic surfaces and certain special conic-quartic configurations, Kodai Math. Journal, vol. 35 78—104 (2012) 査読有
- ⑤ H. Yoshihara, A note on minimal Galois embeddings of abelian surfaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. vol. 126 1—9 (2011) 査読有
- ⑥ H. Yoshihara, Rational cuspidal curve with a Galois point. Math. Nachr. vol. 284, 1583—1587 (2011) 査読有
- ⑦ M. Kanazawa and H. Yoshihara, Galois group at Galois point for genus-one curve. Int. Journal of Algebra, vol. 5, 1161—1174 (2011) 査読有
- ⑧ H. Yoshihara, A relation between Galois automorphism and curve singularity. JP J. Algebra Number Theory Appl., vol. 20 213—223 (2011) 査読有
- ⑨ M. Artebani and S. Kondo, The moduli of curves of genus 6 and K3 surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 363 1445—1462 (2011) 査読有
- ⑩ S. Kondo, Moduli of plane quartics, Goepel invariants and Borcherds products, International Math. Research Notices, vol. 2011, 2825—2860 (2011) 査読有
- ⑪ H. Kojima, Open algebraic surfaces with $k=p_g=0$ and $P_2>0$, Osaka Journal of Math., vol. 48, 1063—1084 (2011) 査読有
- ⑫ H. Kojima, On the kernel of some higher derivations in polynomial rings, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 215, 2512—2514 (2011) 査読有
- ⑬ H. Kojima and N. Wada, Kernels of higher derivations in $R[x, y]$, Communications in Algebra, vol. 39 1577—1582 (2011) 査読有
- ⑭ K. Konno, Chain-connected component decomposition of curves on surfaces, J. Math. Soc. Japan vol. 62 467—486

- (2010) 査読有
- ⑮ K. Konno, Canonical fixed parts of fibered algebraic surfaces, *Tohoku Math. J.* vol. 62 117—136 (2010) 査読有
 - ⑯ H. Tokunaga, Geometry of irreducible plane quartic and their quadratic residue conics, *J. Singularities (electric)* vol. 2 170—190 (2010) 査読有
 - ⑰ E. Emura and H. Kojima, Remarks on numerically positive line bundles on normal surfaces, *Beitraege zur Algebra und Geometrie*, vol. 51, 283—288 (2010) 査読有
 - ⑱ H. Yoshihara, Rational curve with Galois point and extendable Galois automorphism, *J. Algebra* vol. 321 1463—1472 (2009) 査読有
 - ⑲ H. Tokunaga and T. Yasumura, Non-Galois triple covers of P^2 branched along quintic curves and their cubic equations, *Nihonkai J. Math.*, vol. 20, 109—126 (2009) 査読有
 - ⑳ T. Ishida and H. Tokunaga, Triple covers of algebraic surfaces and a generalization of Zariski's example, *Advanced Studies in Pure Math.*, vol. 56, 169—185 (2009) 査読有

[学会発表] (計 20 件)

- ① H. Tokunaga, Geometry of section of elliptic surfaces and its applications, *Topology of Singularities and Related Topics III*, 2012年3月30日 University of Dalat.
- ② 金銅誠之, K3 曲面の幾何と Leech 格子, 日本数学会年会特別講演 2012 年 3 月 28 日, 東京理科大学
- ③ K. Konno, Normal sextic surfaces which are canonical, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2012 年 3 月 16 日, 九州大学
- ④ H. Kojima, Remarks on normal del Pezzo surfaces of rank one, 第 9 回アフィン代数幾何学研究集会, 2012 年 3 月 2 日, 関西学院大学大阪梅田キャンパス
- ⑤ 吉原久夫, Sextic variety as Galois closure variety of smooth cubic, 代数幾何学ミニワークショップ, 2012 年 2 月 11 日, 兵庫県八千代プラザ
- ⑥ 吉原久夫, Minimal Galois embeddings of abelian surfaces, 射影多様体の幾何とその周辺, 2011 年 11 月 4 日, 高知大学理学部
- ⑦ S. Kondo, K3 and Enriques surfaces,

Workshop on Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, the Fields Institute, 2011 年 8 月 17 日, 18 日, Toronto, Canada

- ⑧ H. Kojima, Logarithmic plurigenera of some open algebraic surfaces, 代数幾何学シンポジウム—佐渡—, 2011 年 6 月 2 日, 佐渡島開発総合センター
- ⑨ K. Konno, Regular canonical surfaces of degree $3n-3$ in P^n , Parts I and II, Two Weeks of Classical Algebraic Geometry, 2011 年 5 月 16 日, 23 日, Padova University, Italy
- ⑩ H. Tokunaga, On quadratic residue curves and its application, Workshop on Computational Aspects of Birational Geometry, NIMS, 2011 年 3 月 29 日, Daejeon, Korea
- ⑪ H. Yoshihara, Galois embeddings of K3 surfaces—abelian case—, Conference on Affine Algebraic Geometry, 2011 年 3 月 4 日, 関西学院大学梅田キャンパス
- ⑫ H. Kojima, Some elementary results on kernels of higher derivations, Int. conference on Commutative Algebra and Algebraic Geometry, 2010 年 12 月 9 日, Indian institute of Science, Bangalore, India
- ⑬ 小島秀雄, 対数的小平次元が 1 となる開代数曲面について, 射影多様体の幾何とその周辺, 2010 年 11 月 5 日, 高知大学
- ⑭ H. Tokunaga, Splitting curves in double covers and elliptic surfaces, Galois theoretic Arithmetic Geometry, 2010 年 10 月 16 日, 国際高等研究所
- ⑮ S. Kondo, The supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 2, Workshop on elliptic surface and K3 surface at the Humboldt University, 2010 年 7 月 16 日, Berlin, Germany
- ⑯ 徳永浩雄, ある conic-quartic configuration と有理楕円曲面, Workshop on Galois point and related topics, 2010 年 6 月 5 日, 神奈川大学富士見高原研修所
- ⑰ 吉原久夫, Galois lines for elliptic curves in P^3 , アフィン代数幾何学研究集会, 2010 年 3 月 4 日, 関西学院大学梅田キャンパス
- ⑱ S. Kondo, The moduli spaces of Enriques, Coble surfaces and automorphic forms, Lie algebra, vertex algebra and automorphic forms, 2009 年 9 月 2 日, ICMS, Edinburgh, UK
- ⑲ H. Yoahihara, Singular plane curve with Galois point, Singularity Theory

Working Days, 2009 年 7 月 17
日, Kazimierz Dolny, Poland

- ⑳ K. Konno, Certain surface singularities of general type, Hodge theory and algebraic geometry, Occasion of the 60th birthday of Prof. Sampei Usui, 2009 年 6 月 29 日, 京都大学数理解析研究所

[その他]

ホームページ等：次のホームページに最近までの成果及び未解決問題が掲載されている。
<http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~yoshihara/openquestion.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉原 久夫 (YOSHIHARA HISAO)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号：60114807

(2) 研究分担者

徳永 浩雄 (TOKUNAGA HIROO)
首都大学東京・理工学研究科・教授
研究者番号：30211395

(3) 連携研究者

金銅 誠之 (KONDO SHIGEYUKI)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号：50186847
今野 一宏 (KONNO KAZUHIRO)
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号：10186869
小島 秀雄 (KOJIMA HIDEO)
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：90332824