様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　4 月 22 日現在

機関番号：15401
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2011
課題番号：21540038
研究課題名（和文）　モチーフの Conservativity と有限次元性予想

研究課題名（英文）　Conservativity and finite dimensional conjecture for Motives

研究代表者
木村　俊一（KIMURA SHUN-ICHI　）
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10284150

研究成果の概要（和文）：多項式の零点として定義される図形を、代数多様体と呼ぶ。代数多様体の閉部分多様体もチャウ多様体と呼ばれる代数多様体によってパラメーターづけできるが、そのチャウ多様体のモチーフを係数としてベキ級数を作ると、トーリック多様体など重要な代数多様体の場合に A^1 ホモトピーという関係式のもとで有理式になることを証明した。A^1 ホモトピーは非可換モチーフという物理数学にあらわれる関係式であり、チャウ多様体と物理数学との関係を示唆する成果である。

研究成果の概要（英文）：Algebraic varieties are the spaces defined as the zero sets of polynomials. Closed sub algebraic varieties are parametrized also by algebraic varieties, called Chow varieties. The main result of this research is that the power series taking these Chow varieties (of important varieties such as Toric varieties) as coefficients become rational functions, under the relation called A^1 homotopy. A^1 homotopy naturally arises in non-commutative motives, related to physical mathematics, and our result implies that Chow varieties must be deeply related to physical mathematics.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：チャウ多様体、トーリック多様体、モチビックチャウ級数、モチーフ、有限次元性予想

１．研究開始当初の背景
モチーフの有限次元性予想は、モチーフ理論における基本的な予想の一つであり、本研究の中心課題である。この予想の解決を目論みながらも、その周辺の課題についても研究を行っていた。
モチーフの有限次元性予想からモチビックゼータの有理性が従い、一方、モチビックゼ

ータの有理性はほぼモチーフの有限次元性をあらわすものと思われる。モチビックゼータの自然な一般化としてモチビックチャウ級数の有理性について、調べていたが、モチビックチャウ級数は一般には有理的でないことが示されていた。

２．研究の目的

（１）モチーフ研究における中心的な課題のひとつとして、Conservativity Conjecture がある。その主張するところは、Chow motives がなす圏から体上のベクトル空間へのヴェイユコホモロジー関手が Conservative になること、すなわち Chow Motive M のコホモロジーが 0 ならば M 自身が 0 であろう、とする予想である。その意味するところは、Chow Motive の重要な性質は全てコホモロジーを見ればわかる、ということである。例えば幾何種数 0 の代数曲面の Chow 群が表現可能であろうとする Bloch 予想が Conservativity 予想から従うことが知られている。研究代表者は、モチーフの有限次元性という概念を提唱し、Chow Motive M が有限次元的であれば、その M に対して Conservativity 予想が成立することを証明した。逆に、Sign 予想という弱い仮定のもとで、Conservativity 予想が成り立てば、全ての Chow motives が有限次元的になる。本研究の目的は、この有限次元性の概念を用いて、Conservativity 予想の証明を試みる事が中心である。
また有限次元性の研究の過程で派生した諸問題についても研究を進めたい。そのような研究課題として次のようなものがある。

（２）ピカールモチーフ、アルバネーゼモチーフなどは、現在知られている構成では、自然に有限次元的となる。有限次元予想を仮定すれば、これらのモチーフが一意になるかどうかを考える。また、

（３）モチーフが有限次元的であれば、Chow Motives を係数としたモチビックゼータが有理関数となることが知られているが、有限次元性以外の方法からモチビックゼータの有理性が示されるかどうかを考える。

（４）混合モチーフの場合、モチーフは必ずしも有限次元的になるとは限らないことが知られているが、その場合には Schur 有限次元的、という性質を持つ事が予想されている。研究代表者の研究により、Schur 有限次元的なモチーフには Schur 次元という概念を定義することができ、モチーフの場合にはその Schur 次元が、ヤング図形の言葉で言うと長方形になると予想される。それを直接示すことができるかどうかについて考える。また Schur 次元が長方形なら、Determinant を考えることができるが、その Determinant は１次元になり、特に Tate Motive になるだろうと予想される。そのような予想についても、部分的にでも証明が与えられると、本質的な問題がどこに潜んでいるかが明らかになると思われる。

（５）モチビックゼータの一般化として、モチビックチャウ級数がある。モチビックチャウ級数は一般には有理的にならないことが知られているが、どういう場合に有理的になるか、また有理的でなくても、代数的か、あるいは何らかの微分方程式を満たすか、などの問題を考える。

３．研究の方法

モチーフの有限次元性予想証明へのアプローチとして、次の４つを挙げることができる。

（１）Ayoub 氏が提唱した Conservativity 予想証明のアイデアとして、モチーフの変形を用いる、というものがある。Ayoub 氏のオリジナルのアイデアは特異点を持つ場合に変形して、より易しいケースに帰着させようというものであったが、研究代表者のアイデアで、超曲面の場合に Fermat variety に変形すれば良く、そうすると非特異の場合の変形のみ扱えば良いことになる。

（２）有限次元性のひとつの言い方として、Determinantal conjecture がある。これはモチーフの最大 wedege 積（あるいは対称積）が１次元になることを用い、その場合に Tate モチーフと同型になることを示そう、というアイデアである。Tate モチーフと同型ということは、サイクル２つの直積としてモチーフの projector があらわされる、ということである。ある種の超曲面の場合にはそのようなサイクルの候補を作ることができるので、それを用いて Determinantal conjecture の証明を試みることができる。

（３）モチーフの有限次元性の概念を拡張して、モチーフの射の有限次元性という概念を定義する方法が考えられる。例えば、代数多様体２つの直積の余次元１のサイクル、つまり因子は Correspondence を定め、それはモチーフの射と見なすことができるが、そのような射は有限次元的になる。この概念を使うことで、より一般的な状況で議論ができることになる。

（４）モチーフの有限次元性からモチビックゼータの有理性が従うが、逆にモチビックゼータの有理性をまず示して、そこからモチーフの有限次元性を示す事ができるかどうか

を考える、というアプローチが考えられる。

４．研究成果

（１）

最も大きな成果は、研究目的（５）に関する研究成果である。トーリック多様体などのモチビックチャウ級数が A^1 ホモトピーを法として有理的になる、という現象を発見した（雑誌論文１）。A^1 ホモトピーを法としないと、モチビックチャウ級数はほとんど有理的にならない、ということがわかっていたので、これは重要な成果である。ここで自然に「A^1 ホモトピー」という条件が出て来たことが特に面白く、これは可換モチーフを非可換モチーフの圏に埋め込んだ時の Kernel であって、モチビックチャウ級数の問題が、本来非可換モチーフでの現象であることを示唆するものである。

非可換モチーフはゲージ理論などとの関係で自然にあらわれるものであり、これまでヒルベルト多様体を用いた研究が多く行われているが、チャウ多様体を用いたアプローチが本研究をきっかけとして生まれる可能性がある。モチビックチャウ級数の有理性が証明されたのは、トーリック多様体の他にある種のグラスマン多様体であるが、これらは一元体 F_1 上定義される代数多様体であろうと考えられている。一元体上の幾何学との関係を示唆する者であるとも考えられ（Colliot-Thelene 教授の指摘であるが、A^1 ホモトピーを法として有理的、という性質は、F_1 上で点の個数を数えることにあたる）、今後の大きな発展のきっかけになる可能性がある。

（２）

もうひとつの重要な成果は、A^1 ホモトピーを法としても有理的にならないモチビックチャウ級数の存在証明（高橋宣能氏、黒田茂氏との共同研究）で、これも研究目的（５）に関係するものであるが、技術的に証明された内容は、モチーフ以外の分野にも広く有益な可能性がある（現在論文準備中、学会発表１、２、３の中で、この成果も紹介した）。

（３）

また、研究目的（３）に関して、木村健一郎氏、高橋宣能氏との共同研究で、テンソル圏の元で、Schur 有限だが、uniformly rational にならない例を構成した（雑誌論文２）。

Larsen-Lunts の研究で、級数の有理性にも様々な概念があり、一番強い条件が uniformly rational、比較的弱い条件として determinantally rational などがある。モチーフが有限次元的であれば、uniformly にも determinantal にも rational であるが、Schur 有限次元的な場合には、determinantally にしか rationality がわかっていなかった。

Conservativity との関連で言うと、Schur 有限次元性から一般には Conservativity は出ないようであるので、モチビックゼータの rationality から有限次元性を示そう、と言う研究課題を考える際に、Schur 有限次元性と有限次元性を区別できるような rationality の概念があるかどうかが興味の対象となる。本成果によって、uniform rationality が、Schur 有限次元性と、有限次元性を峻別できる概念である可能性が残ったことになる。なお、Schur 有限次元であっても、その Schur 次元が hook であれば、Uniformly rational になることがわかる。

一方、Schur 次元が hook の場合（そしてその場合に限り）Conservativity が成り立つので、Uniform rationality と Conseravitivy との関連を考える、という今後の課題が提出されたことにもなる。

（４）

研究方法（３）に関して、有限次元射の理論を完成した。テンソル圏において、射が偶に有限次元的であるとは、その射の十分高い wedge 積が０になること、また射が奇に有限次元的であるとは、その射の十分高い対称積が０になること、と定義し、偶に有限次元的な射と奇に有限次元的な射の和として書ける射を有限次元射であると定義する。すると、有限次元射は、任意の射との合成が再び有限次元射となり、また有限次元射どうしのテンソル積が再び有限次元射となる。対象が有限次元的になるための必要十分条件は、その対象の恒等射が有限次元射となることである。この理論を用いて、これまで有限次元的であることの証明が難しかったモチーフの有限次元性を証明した（雑誌論文３）。

（５）

研究目的（２）に関して、アルバネーゼモチーフとピカールモチーフの一意性証明を行った（雑誌論文４）。

（６）

Jannsen により、代数多様体においてサイクル射が単射ならば全射という定理が示されていたが、それを Chow Motives に拡張した（雑誌論文５）

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

１
J. Elizondo, S. Kimura, Rationality of motivic Chow series modulo A^1-homotopy, Advances in Mathematics (to appear)査読有

２
K. Kimura, S. Kimura, N. Takahashi: Motivic zeta functions in additive monoidal categories, Journal of K-theory (to appear) 査読有

３
P.L. del Angel, S. Kimura: Finite dimensional morphisms in a tensor category, Journal fuer die Reine und Angewandte Mathematik, 65 (2011) 213-222 査読有

４
S. Kimura, J. Murre: On natural isomorphisms of isomorphisms of finite dimensional motives and applications to the Picard motives, in Cycles, Motives and Shimura varieties TIFR (2010) 227-242

５
S. Kimura: Surjectivity of the cycle map for Chow motives, in Motives and algebraic cycles, Fields Inst. Commun.(2009) 157-165 査読有

６
J. Elizondo, S. Kimura: Irrationality of the motivic series of Chow varieties, Mathematisches Zeitschrift 263 (2009) 27-32

〔学会発表〕(計 14 件)
１
S. Kimura: Rationality and Irrationality of motivic Series, Workshop on p-adic arithmetic geometry and motives, 2012 年 1 月 23 日、東北大学

２
木村俊一 Irrationality of Certain Euler-Chow series, 日大特異点セミナー、2011 年 10 月 3 日、日本大学文理学部

３
S. Kimura: Rationality and irrationality of Motivic Chow series, O'Sullivan Conference、2011 年 9 月 2 日、オーストラリア国立大学、オーストラリア

４
木村俊一, Diophantine Frobenius Problem, 広島大学代数学セミナー、2011 年 5 月 20 日、広島大学

５
木村俊一, Diophantine Frobenius Problem, 日大特異点セミナー、2011 年 5 月 16 日、日本大学文理学部

６
S. Kimura, On rationality of moticic Chow series, Cohomology of algebraic varieties, Hodge Theory, Algebraic Cycles, Motives, 2010 年 4 月 27 日、Henri Poincare Insrtitute、フランス

７
木村俊一、A^1-homotopy を法としての Motivic Chow Series の有理性、九大代数学セミナー、2010 年 4 月、九州大学

８
木村俊一、モチーフのサイクル射の全射性について、鹿児島大学談話会、2009 年 12 月、鹿児島大学

９
木村俊一、Rationality of Motivic Chow series Modulo A^1-homotopy、日大特異点セミナー、2009 年１０月、日本大学文理学部

１０
木村俊一 Rationality of Motivic Chow series modulo A^1-homotopy, 広島大学代数学セミナー、2009 年 10 月、広島大学

１１
S. Kimura, Counting, K-ring motivic zeta and beyond, メキシコ自治大学幾何セミナー、2009 年９月、メキシコ自治大学、メキシコ

１２
S. Kimura, K-rings, counting the infinity and motivic zeta, CIMAT コロキウム、2009 年９月、CIMAT、メキシコ

１３
S. Kimura, On the surjectivity of the cycle map for motives, Algebraic K-theory and motivic Cohomology, 2009 年 7 月、Oberwolfach 数学研究所、ドイツ

１４
S. Kimura, On determinantal conjecture, 玉原数論幾何学研究集会、2009 年５月、東京大学玉原国際セミナーハウス

６．研究組織

(1)研究代表者

木村　俊一（KIMURA SHUNICHI）

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10284150

(2)研究分担者

高橋　宣能（TAKAHASHI NOBUYOSHI）

広島大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60301298

（３）連携研究者

なし