

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月14日現在

機関番号：15401  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2009～2011  
 課題番号：21540039  
 研究課題名（和文） モジュライ空間と導来圏  
 研究課題名（英文） Moduli spaces and derived categories  
 研究代表者  
 石井 亮（ISHII AKIRA）  
 広島大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号：10252420

研究成果の概要（和文）：ダイマー模型に付随してできる、関係式つき籠と3次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体が導来同値になるための条件を決定した。2次元トーリック弱ファノスタックの上に直線束からなる充満強例外列を構成した。Special McKay 対応に付随する半直交分解の残りの成分が例外列で生成されることを示した。フェルマー多様体の導来圏のある種の記述を得た。Iterated G-Hilbert scheme について結果を得た。

研究成果の概要（英文）：We determined the consistency condition for dimer models which ensures the derived equivalence between the quiver with relations and the 3-dimensional Gorenstein affine toric variety associated to it. We constructed a full strong exceptional collection consisting of line bundles on a 2-dimensional toric weak Fano stack. We proved that the remaining component in the special McKay correspondence is generated by an exceptional collection. We obtained a certain kind of description of the derived category of a Fermat variety. We obtained some results on iterated G-Hilbert schemes.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：導来圏, McKay 対応, ダイマー模型, ミラー対称性, ヒルベルトスキーム

1. 研究開始当初の背景

2次元実トーラス上のダイマー模型が、3次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体のクレパント解消/非可換クレパント解消と対応するであろうことは、物理学者たちによって「発見」されていた。ただし、ダイマー模型に対して、「consistency」と呼ばれるよい条件を仮定しなければ、期待するような結果は成り立たない。Consistency に相

当すべき条件はいくつか提案されていたが、どの条件がよいか、またそれら相互の関係も不明であった。

2. 研究の目的

ダイマー模型に付随してできる、関係式つき籠と3次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体のクレパント解消とが導来同値になるための条件について明らかにし、この、いわゆる consistency の条件としていく

つか提唱されているもの相互の関係も明らかにする。さらに、任意の3次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体に対して、consistency の条件を満たすダイマー模型を構成する。また、ダイマー模型の研究の応用として、2次元トーリックファノスタックに直線束からなる full strong exceptional collection を構成することを目論む。

### 3. 研究の方法

3次元ゴレンシュタインアフィントーリック多様体は、格子凸多角形に対応することに注意する。三角形に対応するのは、商特異点の場合であり、この場合いわゆる McKay 対応により、示すべき結果が成り立つことはよく知られている。凸多角形の頂点の1つを取り除き、他の格子点の凸閉包を取るときに何が変化するかを考察し、その変化の様子を詳しく記述することにより、凸多角形の面積についての帰納法を用いたのが我々の方法である。三角形の頂点を取り除く場合は、2次元のいわゆる special McKay 対応というものを用いると、変化の様子はよくわかり、それはある連分数展開を用いて記述される。一般のダイマー模型の場合には、zigzag path という概念を用いて large hexagon というものを考えることにより、三角形の場合に帰着するというを行った。

これらのことを実行するために、内外の多くの研究者と会い、研究打ち合わせを行った。また、現象を正しく把握するため、多くの例の計算を試行錯誤的に行った。

### 4. 研究成果

初年度は、おもにダイマー模型の consistency の問題、トーリックファノ曲面上の直線束からなる full strong exceptional collection の構成、special McKay 対応と半直交分解と言った問題について研究した。ダイマー模型の consistency については、これまでの研究で zigzag path を用いた定式化ができていたが、それが Gulotta のいう properly ordered という概念と同値であることを示した。これによって、一見様々な定義の存在するよう見える cdconsistency という概念は、同値なものを除くと2つになることがわかった。また、3次元ゴレンスタイントーリック特異点のクレパント解消は、あるダイマー模型に付随する簾の表現として得られるが、特異点を定める凸多角形の内部および周の格子点を指定すると、2次元の弱トーリックファノスタックが対応する。簾の表現のモジュライ上の tautological bundle が tilting generator であることをうまく使って、任意の2次元トーリック弱ファノスタック上の full strong exceptional collection で直線束からなるものを構成することができた。このことは一

般次元でも成り立つと予想されているが、本研究はその2次元版を完全に解決したものであり、また直線束の構成が天下り式ではなくモジュライ的手法によって与えられることは意義のあることと思われる。

22年度は、主に special McKay 対応と半直交分解について研究した。SL(2, C)の有限部分群Gによる商特異点に対し、その最小特異点解消の幾何学とGの表現論とを結びつけるのが McKay 対応である。McKay 対応は、最小特異点解消の接続層の導来圏とGと多項式環の接合積上の有限生成加群の導来圏の圏同値として実現することができる。より一般にGがGL(2, C)のsmallな有限部分群であるとき、最小特異点解消から得られるものの方が、接合積から得られるものよりも小さい。圏論的には、最小特異点解消の接続層の導来圏が、接合積の有限生成加群の導来圏の充満部分圏になる、ということが知られている。本年度研究したのは、その「差」に当たる部分の構造である。その成果として、接合積の有限生成加群の導来圏が、最小特異点解消の接続層の導来圏と、例外列による半直交分解を持つ、ということを示すことができた。

さらに、invertible polynomial に付随する Deligne-Mumford stack 上に、充満例外列が存在するか、という問題にも取り組んだ。上記 special McKay 対応に関する成果の応用として、2次元の場合には確かに充満例外列が存在する、ということを示すことが出来た。これは、invertible polynomial に関するホモロジー的 transpose ミラー対称性予想から予想されることであった。従って2次元の場合に限定されるが、transpose ミラー対称性予想を支持する結果が得られたということになる。

23年度は、Invertible polynomial に付随して出来るスタック、特に一般次元のフェルマー型の場合について考察した。これは、フェルマー型超曲面を巡回群で割った商スタックだと思えることができる。植田一石氏との共同研究において、このフェルマー型の商スタックの接続層の導来圏は、直線束からなる full strong exceptional collection を持つことを示すことができた。Invertible polynomial に関するミラー対称性に関わる重要な結果である。さらに、より複雑な圏だと考えられる、商を取る前のフェルマー型超曲面自身の導来圏がこの商スタックの導来圏から、軌道圏を作る操作と冪等完備化の操作により回復できるということを示した。

また、SL(3, C)の有限部分群Gと、その正規部分群Nが与えられたとき、複素3次元アフィン空間  $\mathbb{C}^3$  のN-Hilbert scheme へのG/Nの作用に関する(G/N)-Hilbert scheme について考察した。伊藤由佳理氏、A. Nolla 氏と共同で、この「繰り返し Hilbert

scheme] が, ある安定性パラメータによる安定  $G$ -constellation のモジュライ空間であることを示した. さらに, このモジュライ空間がどのようなとき  $G$ -Hilbert scheme と同型になるかという問題について, ある程度の結果を得た. これは, 非可換な  $G$  に対して, 商特異点のクレパント解消として,  $G$ -constellation のモジュライ空間がどの程度変化するか, という問題を考えるにあたって重要な考察である.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. Akira Ishii and Kazushi Ueda, A note on derived categories of Fermat varieties, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読あり, (2012), 掲載決定
2. Akira Ishii and Kazushi Ueda, A note on consistency conditions on dimer models, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読あり, B24(2011), 143-164
3. Perdo Luis del Angel and Shun-ichi Kimura, Finite dimensional morphisms in a tensor category, J. Reine Angew. Math. 査読あり, 656(2011), 213-222
4. Akira Ishii, Kazushi Ueda and Hokuto Uehara, Stability conditions on  $A_n$ -singularities, J. Differential Geom., 査読あり, 84(2010), 87-126
5. Ichiro Shimada, Generalized Zariski-van Kampen theorem and its application to Grassmannian dual varieties, Internat. J. Math., 査読あり, 21(2010), 591-637
6. Ken-ichiro Arima and Ichiro Shimada, Zariski-van Kampen method and transcendental lattices of certain singular K3 surfaces, Tokyo J. Math., 査読あり, 32-1(2009), 201-227
7. E.Javier Elizondo and Shun-Ichi Kimura, Irrationality of motivic series of Chow varieties, Math. Z., 査読あり, 263-1(2009), 27-32

[学会発表] (計 11 件)

1. Akira Ishii, McKay correspondence and dimer models, Mini-workshop of Algebra, 2012 年 3 月 21, 22 日, 国立台湾大学, 台湾
2. 石井 亮, On iterated  $G$ -Hilbert schemes, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学, 2012 年 3 月 16 日, 九州大学数理学研究院
3. Akira Ishii, Dimer models and crepant

resolutions, Noncommutative Algebraic Geometry and D-branes, 2011 年 12 月 13 日, Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook University, USA

4. Akira Ishii, Special McKay correspondence and exceptional collections, Complex Algebraic Geometry, 2011 年 9 月 26 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany
5. 石井 亮, Special McKay correspondence and exceptional collections, 特異点論とそのひろがり, 2011 年 8 月 25 日, 京都大学理学部
6. Akira Ishii, A remark on invertible polynomials and exceptional collections, WORKSHOP ON NON-COMMUTATIVE GEOMETRY AND THE McKAY CORRESPONDENCE, 2011 年 3 月 14 日, 名古屋大学多元数理科学研究科
7. Akira Ishii, Special McKay correspondence and universal localization, Geometry and Algebra of Orbifolds and the McKay Correspondence, 2010 年 8 月 12 日, Warwick University, U.K.
8. Akira Ishii, Dimer models and exceptional collections, DMM seminar, 2010 年 4 月 26 日, 東京大学 IPMU
9. Akira Ishii, Dimer models and exceptional collections, Mirror Symmetry and Gromov-Witten Invariants, 2009 年 12 月 7 日, 東京大学数理科学研究科
10. Akira Ishii, Dimer models and tilting bundles, Complex Algebraic Geometry, 2009 年 10 月 1 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany
11. Akira Ishii, Dimer models and the special McKay correspondence, Algebraic Triangulated Categories and Related Topics, 2009 年 7 月 24 日, 京都大学数理解析研究所 [図書] (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

石井 亮 (ISHII AKIRA)

広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 10252420

##### (2) 研究分担者

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10235616

木村 俊一 (SHUN-ICHI KIMURA)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10284150

隅広 秀康 (HIDEYASU SUMIHIRO)  
広島大学・大学院理学研究科・名誉教授  
研究者番号：60068129

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：