

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月23日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540041

研究課題名（和文） 比較可能性をみたす正則環の研究

研究課題名（英文） VON NEUMANN REGULAR RINGS WITH COMPARABILITIES

研究代表者

久田見 守 (KUTAMI MAMORU)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80034734

研究成果の概要（和文）：フォン・ノイマン正則環研究は、可換正則環研究や入射正則環を含む連続系正則環研究に始まり、現在その方向は比較可能系正則環研究に向かっている。正則環研究の主要なテーマは、有限性の探求・個々の正則環の構造研究・新しい型の正則環発見に大別される。この研究は、種々の比較可能系正則環に対して、有限性問題・行列環への移行問題・射影加群削除問題・環の構成法などの解明を行い、比較可能系正則環の構造理論構築を目指したものである。

研究成果の概要（英文）：The study of von Neumann regular rings was first begun from the study of commutative von Neumann regular rings and the study of continuous von Neumann regular rings which contain self-injective von Neumann regular rings. Recently, the investigation of von Neumann regular rings with comparabilities has been proceeded by many ring theorists. Historically, the main themes for studies of von Neumann regular rings are the investigations of finiteness, characteristics and constructions. In this research, we investigated finiteness, heredity to matrix rings, cancellations and constructions on von Neumann regular rings with various comparabilities, to construct the theory of von Neumann regular rings with comparabilities.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：環論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論・加群論、ノイマン正則環、比較可能性、有限性、ダイレクト・ファイナリティ性、射影加群、削除問題

1. 研究開始当初の背景

正則環研究は、フォン・ノイマンに始まる連続幾何学の束による実現を創始とし、可換正

則環研究を含むアーベリアン系正則環の研究に始まる。正則環理論形成の基となった内海氏の「極大商環の存在理論(1956年)」によ

り、豊富な入射正則環の存在が明らかとなり、入射正則環の構造理論が構築された。ここに入射正則環を含む連続系正則環の研究が始まり、正則環はネーター環・アルチン環と共に環論における主要な位置を占めることとなる。その後、次元関数をもつ正則環や一般比較可能性を持つ正則環研究へと比重を移し、正則環研究は比較可能系正則環研究に向かった。ところで、正則環研究の主要なテーマは、ダイレクト・ファイナイト性やユニット正則性に代表される有限性の研究、個々の正則環についての構造研究、新しい型の正則環発見に大別される。有限性に関しては、未解決問題「どの種のダイレクト・ファイナイト正則環がユニット正則環であるか」及び「単純ダイレクト・ファイナイト正則環は常にユニット正則環であるか」が1968年以来議論されてきた。1991年、弱比較可能性という新しい概念が発見され、上記未解決問題解決の端緒となる「弱比較可能性を持つダイレクト・ファイナイト単純正則環は常にユニット正則環である」という結果が証明された。この結果により、比較可能系正則環研究は新たな時代を迎える。S-比較可能性を持つ正則環研究や弱比較可能性を持つ正則環研究が各研究者独自の手法を用いて進められた。このような背景を踏まえ、比較可能系正則環の構造研究が現在重要な課題となっている。

2. 研究の目的

本研究では、正則環研究の中核をなす比較可能系正則環の構造解明とその理論構築を目的とする。比較可能系正則環には、「弱比較可能性」「S-比較可能性」「一般 S-比較可能性」「Almost 比較可能性」「一般 Almost 比較可能性」を満たす正則環などがある。これらの比較可能系正則環について、次に挙げる(1)～(4)の視点からその構造を解明する。

(1)ダイレクト・ファイナイト性とユニット正則性に関する有限性問題（内部構造問題）：
どの種のダイレクト・ファイナイト比較可能系正則環がユニット正則環であるか。

(2)行列環問題（森田不変問題）：

ダイレクト・ファイナイト比較可能系正則環の行列環は、再びダイレクト・ファイナイト性を満たすか。

(3)射影加群削除問題（外部構造問題）：

①比較可能系正則環は Separative 性を満たすか。

②比較可能系正則環は Strict cancellation property, Strict unperforation property を満たすか。

(4) 比較可能系正則環の新たな構成法の解明。

3. 研究の方法

研究実施期間最初の平成21年度は、比較可能系正則環の中の「Almost 比較可能性」を持つ正則環研究に焦点を絞り、研究課題「有限性問題・行列環問題・射影加群削除問題・新しい環の構成法」の解明に取り組む。研究実施期間2年目の平成22年度は「S-比較可能性」や「一般 S-比較可能性」を持つ正則環研究に焦点を絞り、更に研究実施期間最終年度の平成23年度は「一般 Almost 比較可能性」を持つ正則環研究に焦点を絞り、上記研究課題の解明に取り組む。研究分担者は、主として多元環や多項式環による新たな比較可能系正則環の構成法の解明を担当する。研究計画は以下の通りである。

(1) 研究代表者は各年度最初に当該年度の課題を確認すると共に、その課題に関して過去に得られている代表者の研究結果や他の研究者の最新の研究状況について、分担者と情報を共有する。その後、各担当者の研究進捗状況を共有する為、定期的に合同ゼミナールを行う。

(2) 研究目的達成上必要な環論、多元環論、表現論等の代数学関連図書を年度ごとに早期に購入し、課題達成に必要な研究環境を整える。

(3) 出張を通して研究推進に不可欠な情報を収集する。研究代表者は分担者と手分けして、日本数学会・シンポジウム・研究集会などに出席し、正則環及び関連分野である環論・表現論・多元環論・計算機代数等の専門家の最新結果について情報を収集し、本申請課題の研究推進に努める。

(4) 国内外の会議・シンポジウムにおいて研究成果の講演発表を行う。

(5) 代表者と分担者による合同ゼミナールで、研究結果を適宜整理・推敲し、得られた結果を学術雑誌に論文として公表する。

(6) 科研期間終了後に、平成21年度～平成23年度の3年間に得られた研究内容を報告書として纏める。

4. 研究成果

比較可能系正則環に関する研究成果を、年度ごとに纏め以下に述べる。

(1) [平成21年度]

研究実施期間初年度である平成21年度は、今後3年間における研究基礎期間と位置付けた。様々な型を持つ比較可能系正則環の中の「Almost 比較可能性をみたす正則環」に焦点を絞り、この環に関する「行列環問題・射影加群削除問題・環の構成法等」の解明に取り組み、次の結果を得た。最初に、「Almost 比較可能性をみたす正則環上の可算生成射影加群全体の集まりは再び Almost 比較可能性をみたす」ことを証明し、有限生成射影加群よりもより一般的な射影加群における

Almost 比較可能性の成立という結果を得た。筆者はこれまでに自身の学術論文において、この型の新たな環を構成する上で重要な役割を担う「Almost 比較可能性をみたす正則環上の有限生成射影加群全体の集まりは再び Almost 比較可能性をみたす」という事実を証明していたが、今回得られた成果はこの結果を包括的に含むものである。更に、その結果を用いて、「Almost 比較可能性をみたす正則環上の有限生成射影加群全体の集まり、並びに、ダイレクト・ファイナイト射影加群全体の集まりは、共に Almost 比較可能性に関する Strict unperforation property を満たす」ことを証明した。これは、筆者がこの科研における研究課題として提起した「射影加群の直和に関する削除問題」に対し肯定的解答を得たことを意味する。今回得られた結果を筆者は、Almost 比較可能性をみたす正則環に関する最新成果として、10月に開催された「第42回環論および表現論シンポジウム」において講演発表を行った。詳細は、論文誌「Proceedings of the 42nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory」及び「環論ホームページ」の中で公表した。

(2) [平成 22 年度]

研究実施期間 2 年目の平成 22 年度は、「S-比較可能性を持つ正則環」や、その一般化概念である「一般 S-比較可能性を持つ正則環」に焦点を絞り、「有限性問題（主に (DF) 性問題）・行列環問題・環の構成法」の解明に取り組み、次の結果を得た。最初に、一般 S-比較可能性を持つユニット正則環は Special (DF) 性、即ちダイレクト・ファイナイト射影加群の同型な有限直和は再びダイレクト・ファイナイトであることを証明した。次に、上記条件からユニット性を除いた、一般 S-比較可能性を持つ正則環を考察し、この環に対しては、ダイレクト・ファイナイト有限生成射影加群の有限直和は再びダイレクト・ファイナイトであること、更に、その環上の射影加群について、その全ての部分加群がダイレクト・ファイナイトであるという性質を持つことは上記射影加群の有限個の同型な直和についても同じ性質を満たすことと同値であることを証明した。次に、上記結果を行列環問題に適用し、一般 S-比較可能性を持つ正則環の全ての右イデアルがダイレクト・ファイナイトならば、その行列環も同じ性質をもつことを証明すると共に、無限個の同型な右イデアルの直和を含まないという性質は行列環にも移行することも証明し、最初に与えた環とその行列環との間の有限性問題に対する結果を与えることができた。これは、筆者が提起した「有限性問題・行列環問題」に対する興味ある成果であることを意味する。年度後半には、Special (DF) 性や (DF) 性を満たす一般 S-比較可能性を持つ正

則環の構成方法に取り組み、直積環やその剰余環への研究を進め、直積環の直和による剰余環はその直積と直和の添数集合の濃度により (DF) 性や Special (DF) 性を満たすことを証明し、一般 S-比較可能性を持つ新たな正則環の構成法を与えた。

(3) [平成 23 年度]

研究実施最終年度である平成 23 年度は、研究実施初年度に得られた「Almost 比較可能性を持つ正則環」に関する研究結果を踏まえ、その一般化概念である「一般 Almost 比較可能性を持つ正則環」に関し「有限性問題・行列環問題・射影加群削除問題・環の構成法」の解明に取り組み、次の有用な成果を得た。最初に行列環問題を取り扱い、一般 Almost 比較可能性を持つ正則環の行列環は、常に一般 Almost 比較可能性を持たないことを示すと同時に、一般 Almost 比較可能性を持つ正則環の型分類結果を用いて、どの種の一般 Almost 比較可能性を持つ正則環の行列環が再び一般 Almost 比較可能性を持つかを決定し、行列環への一般 Almost 比較可能性移行問題を解決した。このことは、筆者が提起した「行列環問題」に対する最終的な研究結果を与えると共に、「一般 Almost 比較可能性を持つ正則環の構成方法」をも与えたことを意味する。次に、正則環に関する未解決問題「正則環は Separative 性を常に満たすか」に取り組み、「一般 Almost 比較可能性を持つ正則環は常に Separative 性を満たすこと」を証明し、比較可能系正則環における意義深い結果を与えた。更に、一般 Almost 比較可能性を持つ正則環は「Strict unperforation property」という射影加群削除性を持つことも合わせて証明した。これらの結果を筆者は、6 月末に韓国で開催された「第 6 回日中韓環及び加群論国際会議」において、正則環に関する最新研究結果として講演発表を行う共に、その詳細な内容を報告集で公表した。上記国際会議には、国内を含む世界の環論及び正則環研究者が多数出席しており、その中で比較可能系正則環研究の最新成果を発表することができたことは非常に意義深い。今後さらに様々な比較可能系正則環が世界中の正則環研究者により見出され、その構造研究が進むこととなる。今回の科学研究で得られた成果は、必ずその発展に大きく貢献するものと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Mamoru Kutami, Von Neumann regular rings satisfying generalized almost comparability, *Advances in*

Ring Theory, World Scientific Publishers, 査読有, 2012, pp.96 – 108.

- ② I.Kikumasa, K.Oshiro, H.Yoshimura, A construction of local QF rings and its characterization, Communications in Algebra (掲載決定), 査読有.
- ③ Mamoru Kutami, Almost comparability and related comparabilities in von Neumann regular rings, Proceedings of the 42nd Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, 2010, pp. 38 – 45.

[学会発表] (計 3 件)

- ① Mamoru Kutami, Von Neumann regular rings with generalized almost comparability, The 6th China-Japan-Korea International Conference on Ring and Module Theory, 2011 年 6 月 28 日, Suwon, South Korea.
- ② 古谷 亮輔、菊政 勲、吉村 浩, ある種の多元環の同型について, 平成 22 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2011 年 1 月 30 日, 鳴門地域地場産業振興センター.
- ③ 久田見 守, Almost comparability and related comparabilities in von Neumann regular rings, 第 42 回環論および表現論シンポジウム, 2009 年 10 月 12 日, 大阪教育大学.

[その他]

環論ホームページ

<http://www.cec.yamanashi.ac.jp/~ring/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久田見 守 (KUTAMI MAMORU)
山口大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：80034734

(2) 研究分担者

吉村 浩 (YOSHIMURA HIROSHI)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：00182824

菊政 勲 (KIKUMASA ISAO)
山口大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70234200