

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540044

研究課題名(和文)射影多様体のカステルヌボー・マンフォード量とその周辺の話題についての研究

研究課題名(英文)Castelnuovo-Mumford regularity for projective variety and its related topics

研究代表者

宮崎 誓 (MIYAZAKI, Chikashi)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90229831

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：射影多様体の極小自由分解は定義イデアルの代数的な複雑さを表す重要な不変量である。マンフォードにより導入されたカステルヌボー・マンフォード正則量は定義イデアルの複雑さを表す量である。ブックスバウム多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量は次数および余次元で表されるカステルヌボー型の上限を持つことが知られていた。本研究においては、ブックスバウム多様体の正則量がカステルヌボー型の上限もしくは2番目の上限を満たすときは、有理線織射多様体もしくはデル・ペッツォ多様体の因子となることを示した。さらに、正則量の応用として、多重射影空間上のベクトル束のホロックス型の分裂判定法を求めた。

研究成果の概要(英文)：The minimal free resolution of a projective variety is one of the most important algebraic invariants measuring the complexity of the defining ideal of the variety. My research focuses on bounding the Castelnuovo-Mumford regularity introduced by Mumford. Upper bounds on the regularity of Buchsbaum varieties is known to be described in terms of the degree and the codimension of the variety. I have obtained that a Buchsbaum variety with extremal and next-extremal case having Castelnuovo-type regularity bound is a divisor on either a variety of minimal degree or Del Pezzo variety. Also I have obtained a Horrocks-type criterion on the splitting of vector bundles on multiprojective space as an application of Castelnuovo-Mumford regularity.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何 可換環論 射影多様体 多項式イデアル 極小自由分解 シジジー Castelnuovo-Mumford

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) 射影多様体の極小自由分解を表す重要な不変量であるカステルヌボー・マンフォード正則量の上限を表す問題は空間曲線についてカステルヌボーが研究したことから始まる。1980年代のグルーソン・ラザースフェルト・ペスキンの結果は、正則量が射影曲線の次数と余次元を用いた上限を持つというものであり、彼らの論文は、上限を持つ場合の射影曲線の性質を調べている。以来、アイゼンバッド・後藤予想と呼ばれるカステルヌボー・マンフォード正則量の上限を表す不等式が研究されてきた。予想が立てられて20年以上経過したが、未解決の問題として残されている。
- (2) ブックスバウム環の研究において、1980年代にスツックラード・フォーゲルはブックスバウム多様体の場合は正則量が超平面切断において不変であることを示し、高次元射影多様体の場合を射影曲線に帰着させることによって、ブックスバウム多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量は多様体の次数と余次元で上限を得るという結論を得た。しかも、(1)よりも強いカステルヌボー型の不等式を得た。このアイデアを元に、研究代表者である宮崎はホアとの共同論文において、一般の射影多様体にも適用できることを示した。しかしながら、不等式の「程度」が十分でなく、改良できる余地があった。その後、ナーゲル、シェンツェルらにより、多少の改良がなされているが、まだ十分ではない。
- (3) グレブナー基底理論に代表される計算代数幾何学の発展に相俟って、多項式イデアルの極小自由分解を求める計算可能なソフトウェアが普及し、それに連動してカステルヌボー・マンフォード正則量の研究が進んできた面もある。実際、Math.Sci.Net で 'Castelnuovo-Mumford regularity' を検索すると、約200編の論文がヒットするが、このうち約150編の論文は2000年以降に発表されたものであった。つまり、流行しているテーマの一つであると考えられる。

## 2. 研究の目的

射影多様体の定義方程式、つまり多項式環に現れる斉次式で生成された多項式イデアルについての研究は、ヒルベルトのシジジー定理に遡れる様に、古くからの代数幾何学の研究課題の一つである。射影多様体の定義方程式の複雑さは、座標環もしくは定義イデアルのシジジーを通して、極小自由分解によって表される。射影多様体の定義式の次数を制御

する量であるカステルヌボー・マンフォード正則量は極小自由分解により定まる最も重要な不変量であり、カステルヌボーのアイデアを元にして、マンフォードによって導入された。本研究の目的は、射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量の上限を射影多様体の基本的な不変量で表すこと、および、その上限に近い射影多様体を分類することである。もちろん、いくつかの有名な予想があり、それが解決することがベストであるが、幾ばくかの条件の下に上限を得ること、および、ボーダーラインの多様体を分類することから研究を始めて、大きい目標に近づくことが方針である。それと同時に、多重射影空間への応用など、カステルヌボー・マンフォード正則量の類似の理論を組み立てて、ベクトル束など関連した話題への応用を考えることもこの研究の目的である。

## 3. 研究の方法

射影空間上有限個の斉次多項式の零点として定義される代数多様体の座標環の極小自由分解を記述することを目標に研究を進めた。カステルヌボー・マンフォード正則量に焦点を当てて、射影多様体もしくは多項式イデアルの他の代数的不変量との関係などについて調べた。射影多様体の正則量、多項式イデアルの極小自由分解の研究は、可換環論、射影代数多様体、計算代数全般に関わっている。問題意識を共有し、お互いの研究を理解する分担者、連携研究者、研究協力者を集めて、セミナーを重ねることにより、研究の進展を図った。佐賀大学においては、月2回程度のセミナーを行い、各自の研究を発表した。市川は、数論幾何学の専門家であり、研究代表者とは違った見方のアドバイスも聞いた。岡田は高次元代数幾何学の専門家であり、寺井は、組合せ可換環論の専門家であり、スタンレー・ライスナー環の極小自由分解の記述を通して、カステルヌボー・マンフォード正則量に詳しい。この2名と佐藤榮一(九州大学名誉教授)を含めて頻りにセミナーなどを行った。また、国際研究集会での講演および研究集会での開催などにより、研究情報の交換および研究の進展を得た。2009年1月に佐賀大学で国際研究集会を開催し、連携研究者にも講演してもらうとともに、外国人研究者と射影多様体の極小自由分解の最近の話題を議論した。とくに、シャルダン(パリ第6大学)、カク(KAIST、韓国)を招聘し、実りある研究集会になった。2010年1月にハノイで開催された国際研究集会で発表し、ホア(ハノイ数学研究所)ら関連の研究者とこの問題について議論した。このような研究集会を通じて、連携研究者とはお互いの研究の進展を得た。野間は、射影曲線の正則量と割線の関係や、これらの不変量に関連した射影多様体の分類について多くの結果を得た。尼崎は余次元2の射影多様体の座標環の極小自

由分解の専門家であり、いくつかのアドバイスを受けた。尾形は、トーリック多様体の定義イデアルの生成元やシジジーについて成果をおさめた。

#### 4. 研究成果

- (1) 射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量の上限についての研究を進めた。正則量が射影多様体の次数と余次元による式の上限で表される、正確にいうと、正則量の上限が射影多様体のデルタ種数 + 2 となることはアイゼンバッド・後藤予想として未解決の問題である。一方、射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量が次数と余次元によるカステルヌボー型の上限を持つことはブックスバウム多様体の場合には知られている。この上限に近い多様体の分類を考えた。ブックスバウム多様体の次数が余次元に対して、十分に大きい場合は、ボーダーラインは有理線織多様体の因子、ボーダーラインの一つ下はデル・ペツォ多様体の因子となることを得た。つまり、射影多様体のカステルヌボー・マンフォード正則量とカステルヌボー型の次数と余次元の比較の式があり、最初のケースはデルタ種数 0 の射影多様体の因子、次のケースはデルタ種数 1 以下の射影多様体の因子となり、もちろん因子はある程度具体的に記述できるということである。したがって、ブックスバウムとは限らない一般の射影多様体の正則量について、類似の上限および類似の分類があることが推測される。
- (2) 射影空間のセグレ積上のベクトル束について、それが直線束の直和になるためのコホモロジー的な判定法を考えた。セグレ積上のベクトル束についてコーエン・マッコレー性は必ずしも直線束の直和になることを意味しない。ここに射影空間との違いがある。多重射影空間上の正則量についてバリコ・マラスピナのアイディアから始まる多重カステルヌボー・マンフォード正則量の巧みな定義はこの橋渡しをする。これによって、セグレ積上でのベクトル束が直線束の直和になるための十分条件を拡張することができた。正則量の特徴は多重射影空間上の場合でも「ベクトル束の大域生成」が成立することが肝要である。本来のホロックス判定法は射影空間上の ACM ベクトル束は直線束の直和であるということであるが、これに対して、正則量を用いた別証明を与え、その延長上で多重射影空間についての類似の定理を得るという手法を取った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 20 件)

Miyazaki Chikashi, A cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, Proc. Amer. Math. Soc., 掲載予定, 査読有.

Noma Atsushi, Generic inner projections of projective varieties and an application to the positivity of double point divisors, Trans. Amer. Math. Soc., 掲載予定, 査読有.

Terai Naoki and Trung Ngo Viet, On the associated primes and the depth of the second power of squarefree monomial ideals. J. Pure Appl. Algebra 218, 1117 - 1129, 2014, 査読有.

Ichikawa Takashi, Congruences between Siegel modular forms II. J. Number Theory 133, 1362 - 1371, 2013, 査読有.

Odaka Yuji and Okada Takuzo Birational superrigidity and slope stability of Fano manifolds. Math. Z. 275, 1109 - 1119, 2013, 査読有.

Kimura Kyouko, Terai Naoki and Yoshida Ken-ichi, Licci squarefree monomial ideals generated in degree two or with deviation two, J. Algebra 390, 264 - 289, 2013, 査読有.

Kimura Kyouko and Terai Naoki, Binomial arithmetical rank of edge ideals of forests. Proc. Amer. Math. Soc. 141, 1925 - 1932, 2013, 査読有.

Ogata Shoetsu, Erratum to: Very ample but not normal lattice polytopes. Beitr. Algebra Geom. 54, 769 - 770, 2013, 査読有.

Ogata Shoetsu, Very ample but not normal lattice polytopes. Beitr. Algebra Geom. 54, 291 - 302, 2013, 査読有.

Ichikawa Takashi, Modular invariant D-modules. Math. Res. Lett. 19, 9 - 12, 2012, 査読有.

Terai Naoki and Trung Ngo Viet, Cohen-Macaulayness of large powers of Stanley-Reisner ideals. Adv. Math. 229, 711 - 730, 2012, 査読有.

Ogata Shoetsu, Projective normality of toric 3-folds with non-big adjoint hyperplane sections. Tohoku Math. J., 64, 125 - 140, 2012, 査読有.

Miyazaki Chikashi, Buchsbaum varieties with next to sharp bounds on Castelnuovo-Mumford regularity. Proc. Amer. Math. Soc., 139, 1909 - 1914,

2011, 査読有.

Ichikawa Takashi, Vector bundles on a nearly degenerate Riemann surface. Math. Z., 268, 969 - 977, 2011, 査読有.

Kimura Kyouko, Terai Naoki and Yoshida Ken-ichi, Schmitt-Vogel type lemma for reductions. Arch. Math. (Basel) 96, 535 - 545, 2011, 査読有.  
Crupi Marilena, Rinaldo, Giancarlo and Terai Naoki, Cohen-Macaulay edge ideal whose height is half of the number of vertices. Nagoya Math. J. 201, 117 - 131, 2011, 査読有.

Noma Atsushi, Hypersurfaces cutting out a projective variety. Trans. Amer. Math. Soc. 362, 4481 - 4495, 2010, 査読有.

Terai Naoki and Yoshida Ken-ichi, Locally complete intersection Stanley-Reisner ideals. Illinois J. Math. 53, 413 - 429, 2009, 査読有.  
Noma Atsushi, Multisecant subspaces to smooth projective varieties in arbitrary characteristic. Proc. Amer. Math. Soc. 137, 3985 - 3990, 2009, 査読有.

Noma Atsushi, Rational curves of Castelnuovo-Mumford regularity  $d-r+1$ . J. Algebra 321, 2445 - 2460, 2009, 査読有.

[学会発表](計11件)

Miyazaki Chikashi, A variant of Horrocks criterion for vector bundles on multiprojective space, RIMS 研究集会 可換環論シンポジウム, 2013年12月, 京都大学数理解析研究所.

宮崎 誓, On  $r$ -planes in complete intersections, 代数幾何学セミナー, 2012年11月, 九州大学.

宮崎 誓, Cohomological criterion for splitting of vector bundles on multiprojective space, 代数幾何学セミナー, 2012年6月, 九州大学.

Miyazaki Chikashi, Cohomological splitting conditions for vector bundles, Workshop on Projective Varieties, 2012年2月, 佐賀大学.

宮崎 誓, Regularity of Buchsbaum variety, 特異点とそのひろがり, 2011年8月, 京都大学理学部.

宮崎 誓, 射影曲線の超平面切断と有理正規線織曲面, 代数幾何学セミナー, 2010年11月, 九州大学.

宮崎 誓, 射影多様体の極小自由分解についてのいくつかの話題, 代数幾何学セミナー, 2010年4月, 九州大学.

宮崎 誓, 射影多様体のシジジーをめぐる問題について, 複素幾何と代数幾何の

若手研究集会, 2010年2月, 熊本大学.  
Miyazaki Chikashi, Cohomological annihilators of its application to a classification of projective varieties, The 5<sup>th</sup> Japan-Vietnam joint seminar on Commutative Algebra, 2010年10月, Hanoi (Vietnam).

宮崎 誓, Projective variety with the next extremal bound on the Castelnuovo-Mumford regularity, 射影多様体とその周辺, 2009年11月, 高知大学.

Miyazaki Chikashi, Regularity of projective varieties and classical Castelnuovo's method, Algebraic Geometry Workshop at KAIST, 2009年4月, Daejeon (Korea).

[図書](計0件)

[産業財産権]  
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮崎 誓 (MIYAZAKI Chikashi)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号: 90229831

(2) 研究分担者

市川 尚志 (ICHIKAWA Takashi)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号: 20201923

岡田 拓三 (OKADA Takuzo)  
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授  
研究者番号: 20547012

寺井 直樹 (TERAI Naoki)  
佐賀大学・文化教育学部・教授  
研究者番号: 90259862

(3) 連携研究者

野間 淳 (NOMA Atsushi)  
横浜国立大学・大学院環境情報学研究院・教授  
研究者番号: 90262401

尼崎 睦実 (AMASAKI Mutsumi)  
広島大学・大学院教育学研究科・准教授  
研究者番号: 10243536

尾形 庄悦 (OGATA Shoetsu)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90177113