

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月23日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540045

研究課題名（和文） 代数幾何・学習理論・生物数学に現れる超離散的現象の分野横断的研究

研究課題名（英文） Transversal study on Ultradiscretizing phenomena in algebraic geometry, learning theory and biological mathematics

研究代表者

小林 正典（KOBAYASHI MASANORI）

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：60234845

研究成果の概要（和文）：

- (1) 14 個のユニモダル例外型超曲面特異点に対し、K3 曲面の導来圏に代数的輪体を構成し、それらの圏論的交点数から Dynkin 図形が復元できることを示した。
- (2) 有名な 95 個の重み付き超曲面 K3 特異点族は実は本質的に 75 種類であることを、具体的対応を構成して示した。
- (3) 工程計画問題に初めて幾何学的視点を導入し、クリティカルパスの変化がトロピカル超曲面で起こることを見出し、パスの遷移を可視化する全く新しい方法を開発した。
- (4) 楕円曲線のトロピカル版の位相分類を行った。
- (5) 神経系による機能獲得の代数幾何的手法について議論した。

研究成果の概要（英文）：

- (1) For the fourteen unimodal exceptional hypersurface singularities, we have constructed algebraic cycles in the derived category of K3 surfaces, and shown that we can recover the Dynkin diagrams from their categorical intersection numbers.
- (2) We have shown that the famous ninety-five families of weighted K3 hypersurfaces are, in fact, essentially seventy-five families by constructing concrete correspondences.
- (3) We introduced a geometric point of view to the scheduling problems for the first time, showed that the change of critical paths occurred at a tropical hypersurface and developed totally new method to visualize the transition of paths.
- (4) We did a topological classification of tropical elliptic curves.
- (5) We discussed about algebro-geometric method for acquiring abilities by neural networks.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，代数学

キーワード：トロピカル幾何，特異点

1. 研究開始当初の背景

当時、超離散化の数理現象が、代数幾何(トロピカル幾何学)・可積分系(戸田格子)・超弦理論(開弦)・情報数学(計算論的学習理論)・生物数学(進化系統樹の推定)等といった非常に広範な分野において現れていた。

これらを、単一の分野で扱うのではなく、統一的な理論を開発し、あわせて分野融合的な結果を見出したいと考えた。代数的には局所的な付値と順序加群の理論が底にあることを意識して、代数幾何学の成熟した部分を他分野に応用し、逆に他分野からモデルを得ることにより代数幾何の新たな話題を獲得し発展を目指した。

「超離散化」とは微分方程式で時間・空間のみならず関数の値も離散化したもので、可積分系やリーマン面との対応が見出されている。数式の処理としては、変数 x を $e^{\frac{2\pi X}{h}}$ として、 h を 0 に近づける漸近挙動 $\lim_{h \rightarrow 0} h \log(f(x))$ を考えることに対応する。例えば xy は $X+Y$ に、 $x+y$ は $\max\{X, Y\}$ になる。この $(\max, +)$ 代数、特に、局所線形凸関数による「トロピカル幾何学」の端緒は昔に遡るが、最近進展が著しい。研究代表者のトロピカル幾何学に対する興味の出自は、ミラー対称性における SYZ 構成 ----- カラビ=ヤウ多様体に特殊ラグランジュトーラスのファイブレーションが存在し、双対からミラー多様体が構成できるという仮説 ----- において、臨界値集合がトロピカル多様体に近いと期待されていることである。一般ファイバーはトーラスであるから重要な不変量は退化ファイバーに集中する。この写像は複素解析的ではないが、そもそもミラー対称性は弦対称性の1つであり統一的に扱うには複素射影多様体ではやや狭い。たとえば導来圏から安定性条件により空間構造を作ることが知られており、K理論あるいは圏論的な取り扱いにより不変量を調べられないかというのが元々の動機である。

偶然、超離散的構造が計算論的学習理論でも見出された。「計算とは何か」という定式化は、チューリング機械・帰納的関数など見かけは異なるが等価な形で行われた。有限の記述をもち有限回の手続きで解を得ることが本質的であった。この点は、通常現代数学の存在証明とは異なる。具体的構成法がなくても、背理法で存在を示すあるいは選出公理を用いて構成したことにするのでは不十分なのである。とはいえ、手続きは「停止はするがいつかわからない」のであり、これはネーター環のイデアル列の性質と合致する。これを用いて、学習理論での正データの学習可能性に関する種々の条件に対し、可換環論でモデルが構成された。その本質は単項式のべき指数すなわち付値に対するディクソンの補題であった。

分子生物学では、ゲノム配列の膨大なデータが解析されつつある。例えば共通祖先を持つと考えられる複数の配列に対し、時系列的な分化をグラフで表現する「進化系統樹」の作成手順は単純化すれば次の通り。

- (1) 複数の配列データに対し、どの座が互いに対応するかを推定する。(「整列」)
- (2) 整列された複数のデータに対し、突然変異のモデルを立て、実時間でどれだけ離れているかを推定する。
- (3) グラフの端点間の推定時間差によく合うよう、進化系統樹を作成する。
- (4) 生物学的な意味を読み取り考察を加える。この進化系統樹の分類空間はトロピカルグラスマン多様体であることがわかっていた。

2. 研究の目的

上記の様々な問題について相互の関連により研究するのが目的である。

生命現象は複雑なものであり、数学で扱うものはあくまでもモデルであるが、より現実に近いモデルを探す。計算論的学習理論においても、順序加群の理論からより興味ある例や応用上学習機械につながるアルゴリズムを発見することを目指す。

トロピカル多様体は位相空間と考えるとたちまち障害にぶつかる。直線の場合ですら共通部分が点や直線にならない場合がある。これを回避するため付加的構造を入れて、

- (1) 区分線形関数の環つき空間、
 - (2) トーリック多様体の運動量写像による像、
 - (3) 非アルキメデス的アメーバ、
- 等を用いるのが自然であると思うが、さらに開弦の古典極限としての考察も加えたい。超離散化で基礎となる理論もトロピカル半体等の代数的対象は古典論であり、例えば変形理論を考える上で限界がある。代数幾何の土台が古典的な体上の代数の理論から概型や関手の理論に置き換わったように、関手としての性質、あるいは森田同値のように、幾何的对象の上に定義される関数・微分形式の加群の圏論的性質を考察したい。また例えばトロピカル曲線に対するアメーバ(トーリック超曲面の対数的絶対値写像の像)のように超離散化の逆の漸近近似を研究する。

3. 研究の方法

代数的手法とトーリックおよびトロピカル幾何学を基礎としながら、応用分野の解析を進めた。

基本的には研究代表者が必要に応じて情報収集をしながら一人で行う研究であるが、研究会や勉強会を開催することで、広い分野の研究者との相互作用をもたらした。例えば、代数幾何的内容については、集中して情報収集するため、東京大学玉原国際セミナーハウスにおいて、代数幾何セミナーあるいは

代数幾何サマースクールを毎年開催した。また、関連する様々な研究集会に参加して情報収集を行った。

研究(1)(2)については、K3 曲面族は繊細な取り扱いを要するため、過去の論文で培った知識と技術を活用した。(2)(4)については過去の論文で構成したトーリック幾何の手法を用いた。

この研究期間に特筆すべきこととして、研究開始時には思いもよらなかったことであるが、トロピカル幾何学の工学への応用の端緒を見いだしたため、重点的な研究対象とした。トロピカル幾何に明るい小田切真輔氏との共同研究を行い、自動計測学会における研究発表等を通じて、新たな概念の獲得に努めた。また必要となった書籍を購入した。

4. 研究成果

- (1) 14 個のユニモダル例外型超曲面特異点に対し、Milnor ファイバーのコンパクト化として現れる K3 曲面の中間次元ホモロジーに、特異点解消 (の双対) に対応する代数的輪体と、変形非特異化の消滅輪体が含まれ、これらは凸体のミラー対称性で入れ替わる。植田・真瀬との共同研究で、代数的輪体の対応物を圏論的に構成し、圏論的「交点数」から Dynkin 図形が復元できることを示した (論文 5)。導来圏が幾何的対象となりつつあることの例である。具体的には、特異点の導来圏を、ミルナーファイバー (変形して非特異にした空間) のコンパクト化に用いる無限遠にあるスタックとしての重みつき射影空間上の接続層の導来圏に移し、K3 曲面の導来圏の中に (-2) サイクルに対応する対象を構成することで行った。
- (2) 重み付き超曲面 K3 特異点族は 95 個あることで知られ、業界用語で「有名な 95 個」と言われることもある。ところが、一般元の不変量 (代数サイクルのなす格子) の計算結果を見ると、不変量が同じになる族がいくつかあった。不変量が同じだからといって直ちに同じ族になるわけではなく、そもそも族の次元も違うため、同じという言葉からきちんと定める必要があった。真瀬との共同研究で、不変量が等しいすべての対に対して、全体の族の十分一般的な元を含む部分族の間の同型を構成し、族が実は本質的に 75 種類であることを示した (論文 2)。対応はトーリック幾何の手法で、部分ニュートン多面体をとるという過去に開発したものを用いて、複素トーラスの Lie 群としての自己同型として具体的に構成できた。
- (3) 制御理論、特に工程計画問題の分野では近年、資源衝突問題等への応用がなされていたが、初めて幾何学的視点を導入し、

さらに道を頂点とするグラフを考察した (論文 3)。

- ① まず、工程計画の最小終了時間が、各作業の所要時間を変数とするときトロピカル多項式 (加法と最大値を用いて表される多項式) となることを再発見した。
- ② そこにさらに幾何的発想を加えて、クリティカルパスの変化が、所要時間を変数とする空間内のトロピカル超曲面で起こることを見出した。
- ③ さらに、これを元にクリティカルパスの遷移を幾何的に表し可視化する全く新しい方法を開発した。これらの研究は小田切真輔氏 (首都大学東京) との共同研究として、計測自動制御学会で招待講演 (発表 3)、審査付き学会発表 (発表 5) も行った。これは数学と工学の新たな交流の始まりであり、極めて意義深い。また、北海道大学・埼玉大学・高知大学等の数学の研究集会でも研究発表を行った。この研究は申請当初は全く予測していなかったものであり、研究方針を若干変更したが、超離散化の手法を理学のみならず工学に応用することができたことは期待以上の成果であると言って良いであろう。

- (4) トロピカル平面曲線、特に楕円曲線のトロピカル版の位相分類を行った (論文 4 等)。通常の複素代数多様体では楕円曲線の位相同型類はただ一つであるが、トロピカル多様体においては、100 種類以上の位相同型類が存在することがわかった。その中には、平面 3 次曲線としては実現不可能なものも存在し、トロピカル多様体の双有理幾何への問題を拓いている。
- (5) 神経系による機能獲得において、代数幾何的理解が可能であることを議論した (論文 1)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① 小林正典, 神経システムと代数幾何, 数理解析研究所短期共同研究「離散力学系の分子細胞生物学への応用数理」, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無招待論文, No. 1698 (2010), 172--182.
- ② M. Kobayashi and M. Mase, Isomorphism among families of weighted K3 hypersurfaces, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, 35 (2012) 461-467.
- ③ 小林正典, 入庫・出庫に関連する問題について～流通の現場見学から～, 内閣府経済社会総合研究所『サービス・イノベーション政策に関する国際共同研究』成

- 果報告集シリーズ, 査読無招待論文, NO. 3 (2011), 3--11.
- ④ S. Odagiri, T. Kihara, M. Kobayashi, Topological Classification of Nonsingular Tropical Affine Cubic Curves, The Tsuru University Review, 査読有, 77 (2013) 15-29.
- ⑤ Masanori Kobayashi; Makiko Mase; Kazushi Ueda, A Note on Exceptional Unimodal Singularities and K3 Surfaces, International Mathematics Research Notices, 査読有, 2013; 2013:1665-1690 doi:10.1093/imrn/rns098

[学会発表] (計 11 件)

- ① 小林正典, SYZ 予想と Kontsevich-Soibelman理論, 代数幾何学サマースクール 2009, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2009/7/26
- ② M. Kobayashi, Isomorphism among families of weighted K3 hypersurfaces, Topology of singularities and related topics, the Institute of Mathematics, Vietnamese Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam, 2010/3/26
- ③ M. Kobayashi and M. Mase, Isomorphism among the families of weighted K3 hypersurfaces, International Congress of Mathematicians 2010 Short Communication, Hyderabad, India, 2010/8/21
- ④ M. Kobayashi, Z-affine transformations and families of K3 hypersurfaces, 2011 NIMS Hot Topics Workshop on Computational Aspects of Birational Geometry, National Institute for Mathematical Sciences (NIMS), 大田 (Daejong), 韓国, 2011/3/29
- ⑤ M. Kobayashi and S. Odagiri, Tropical Geometry of PERT, Tropical Geometry Workshop, CIEM, Castro Urdiales, Spain, 2011/12/12
- ⑥ M. Kobayashi, M. Mase and K. Ueda, A note on exceptional unimodal singularities and K3 surfaces, Topology of Singularities and Related Topics, III, University of Dalat, Vietnam, 2012/3/30
- ⑦ 小林正典, Tropical geometry and scheduling problem, 幾何学コロキウム, 北海道大学, 2012/7/20
- ⑧ 小林正典, Tropical geometry and scheduling problem, 代数幾何講演会, 埼玉大学, 2012/7/25
- ⑨ 小林正典, max-plus代数からトロピカル幾何へ, 離散事象システムセミナー「代

数・代数幾何からのアプローチに学ぶ—max-plus代数とトロピカル幾何—, 首都大学東京秋葉原サテライトキャンパス, 2012/8/31

- ⑩ 小林正典, トロピカル幾何と工程計画問題, 研究集会「代数幾何学とその周辺」, 高知大学, 2012/12/8
- ⑪ 小林正典, 小田切真輔, トロピカル幾何と工程計画問題 (—クリティカルパスの遷移の幾何的記述—), 第 52 回「離散事象システム研究会」, 大阪国際会議場, 2013/1/22

[図書] (計 1 件)

- ① 小林正典, 朝倉書店, 線形代数と正多面体, 現代基礎数学 4, 2012, 210

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 正典 (KOBAYASHI MASANORI)
 首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
 研究者番号: 60234845

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし