

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 15 日現在

機関番号：31302

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540047

研究課題名（和文） モジュライ空間上の符号数因子及び符号不足数とその応用

研究課題名（英文） Signature divisor on the moduli of curves, signature defect and its applications

## 研究代表者

足利 正 (ASHIKAGA TADASHI)

東北学院大学 工学部 教授

研究者番号：90125203

## 研究成果の概要（和文）：

代数曲線族の退化ファイバー芽の局所符号数を、次の意味の「モジュライ項」と「モノドロミー項」の和として表す新しい定式化を得た。前者は安定曲線のモジュライ空間上に符号数因子なるものを定義しておき、それをモジュライ写像で引き戻して定義される（吉川謙一氏との共同研究）。後者は局所符号不足数と名付けた量で、位相モノドロミー情報を安定還元族への群作用に翻訳しつつ、オービフォールド符号数定理を適応して得られる。

## 研究成果の概要（英文）：

We have a new formulation of the local signature of a fiber germ of degeneration of curves as a sum of “moduli term” and “monodromy term” in the following sense.

The former is defined as the pull back by the moduli map of the signature divisor on the moduli space of stable curves (joint work with Ken-ichi Yoshikawa).

The latter is called local signature defect, which is obtained via the orbifold signature theorem by interpreting the topological monodromy data as a group action to the stable reduction.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：符号数、モジュライ空間、モノドロミー、退化、局所化、複素曲面、ファイバー空間、安定還元

## 1. 研究開始当初の背景

退化曲線族のファイバー芽の局所符号数に関連する研究は、楕円曲線族についての Atiyah, 種数 2 の曲線族についての堀川顕二, 上野健爾, 松本幸夫らにより開始された。

その後、一般種数の超楕円曲線族について

は、荒川達也・足利による 2 重被覆を用いる方法と、遠藤久顕によるマイヤー関数を用いる方法が現れた。一方 Reid は相対標準環を用いるアイデアを提示したが、今野一宏はこれを発展させ、Clifford 特殊性を固定した曲線族の Horikawa 指数の研究を行った。また工

ータ不変量を用いる飯田修一、マイヤー関数の方法を発展させた久野雄介らの研究も現れた。

以上を背景として、次の欄に示す新しい方法によってこの概念を発展させようとしたのが研究開始当初の状況である。

## 2. 研究の目的

退化曲線族のファイバー芽の局所符号数の概念を「モジュライ項」及び「モノドロミー項」の和としてとらえ、それぞれを具体的に探求することを研究目的とした。

## 3. 研究の方法

研究目的欄に示した「モジュライ項」及び「モノドロミー項」をそれぞれ以下の方法で探求した。

(1) Deligne-Mumford コンパクト化の上に符号数因子なる有理因子を定義しておき、安定ファイバー芽に対してはそれをモジュライ写像によって具体的に引き戻す。

(2) 非安定ファイバー芽に対しては、安定還元から生じる不変量の変動項を位相モノドロミー情報によって具体的に記述する。

## 4. 研究成果

(1) 符号数因子は Hodge 束と境界因子の具体的な線形結合で書ける。奇数種数の場合、これをさらに最大ゴーンナル因子を用いて書き直せる。もし安定族が Harris-Mumford 一般ならば、この表記をモジュライ写像によって引き戻せることが示せた。

(2) 偶数種数の場合、符号数因子は Petri 条件を乱す曲線の locus の閉包となる因子を用いて書き直せる。もし安定族が Eisenbud-Harris 一般ならば、この表記をモジュライ写像によって引き戻せることが示せた。

(3) Nielsen-Matsumoto-Montesinos による位相モノドロミー情報は安定還元族への群作用の情報に書き直せる。これと Atiyah-Singer-Kawasaki の定理を用いて符号数の安定還元への寄与項を具体的に書き下すことができた。

(4) (3) の研究のために重要であった Dedekind 和の連分数表記に関する考察は、以下のような当初予想しなかった思わぬ方向に発展した。すなわち一般次元の巡回商特異点の解消を高次元連分数のアルゴリズムから誘導すること、また高次 Dedekind 和に関する Zagier 相互律の拡張等である。この成果については当該期間中に正式論文を作成

するまでには至らなかったが、引き続き研究しつつ、それを成したい。

(5) 連携研究者の方々は関連する研究内容において、以下の成果をあげられた。

吉川謙一氏は、対合を持つ K3 曲面、解析的トーション、Borchers のファイ関数達の深い関係性を示した。

今野一宏氏は、氏の開発した鎖分解の、特異点や一般型曲面の完備線形系の固定成分についての有用な応用を展開した。

石田弘隆氏は、超楕円曲線束の詳細な地誌学、並びに特異点族を許容する平面曲線の実在性についての成果を上げた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

(1) 研究代表者によるもの

[A1] T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via monodromy and stable reduction, *Comment. Math. Helv.* 85 (2010), 417--461.

[A2] T. Ashikaga, Local signature defect of fibered complex surfaces via moduli and monodromy, *Demonstratio Math.* XLIII (2010), 263-276

(2) 研究代表者と連携研究者の共著によるもの

[AY] T. Ashikaga and K.-I. Yoshikawa, A divisor on the moduli spaces of curves associated to the signature of fibered complex surfaces (with an Appendix by Kazuhiro Konno), *Adv. St. Pure Math.* 56 (2009), 1-34.

(3) 連携研究者によるもの

[Y1] K.-I. Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III, to appear in *Math. Zeit.*

[Y2] K.-I. Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II, to appear in *J. Reine Angew. Math.*

[Y3] K.-I. Yoshikawa, A trinity of the Borchers Phi-function, to appear in *Proc. of Infinite Analysis II*, Springer Proc. in Math.

[Y4] K.-I. Yoshikawa, Calabi-Yau threefolds

of Borcea--Voisin, analytic torsion, and Borchers products, *Asterisque* 328 (2009), 355--393.

[K1] K. Konno and D. Nagashima, Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type, *Osaka J. Math.* 49 (2012), 225--245.

[K2] K. Konno, Chain-connected component decomposition of curves on surfaces, *J. Math. Soc. Japan* 62, no. 2 (2010), 467--486.

[K3] K. Konno, Canonical fixed parts of fibred algebraic surfaces, *Tohoku Math. J.* 62, no. 1 (2010), 117--136.

[K4] K. Konno, Appendix to "A divisor on the moduli space of curves associated to the signature of fibered surfaces", *Adv. St. Pure Math.* 56 (2009), 35--38.

[I1] H. Ishida, The existence of hyper-elliptic fibrations with slope four and high relative Euler-Poincaré characteristic, *Proc. AMS* 139 (2010), 1221--1235.

[I2] H. Ishida and H. Tokunaga, Triple covers of algebraic surfaces and a generalization of Zariski's example, *Adv. Stud. Pure Math.* 56 (2009), 169--185.

[学会発表] (計 25 件)

(1) 研究代表者による招待講演

(A1) T. Ashikaga, Extended Zagier reciprocity for Dedekind sum via cyclic quotient singularities, *Topology of Singularities and Related Topics III*, Dalat VIETNAM, 2012 March 26.

(A2) 足利 正, 巡回商特異点に関する高次元連分数と Zagier 相互律, リーマン面に関する位相幾何学研究集会 (東京大学), 2011 年 9 月 4 日.

(A3) T. Ashikaga, Higher-dimensional continued linear fractions for cyclic quotient singularities, *Workshop on Singularity* (東京理科大学), 2011 January 22.

(A4) 足利 正, Planar continued linear fraction and three-dimensional quotient singularities, *Workshop on Lefschetz*

*fibration and category theory* (大阪大学), 2010 年 6 月 27 日.

(A5) T. Ashikaga, Planar continued linear fraction for three-dimensional cyclic quotient singularities, 第二回東北復旦代数幾何交流シンポジウム, 復旦大学, CHINA, 2010 June 3.

(A6) 足利 正, Toric resolution of a certain non-normal singularity, 山形特異点研究会 (山形大学), 2010 年 3 月 2 日.

(A7) 足利 正, Another geometric proof of the reciprocity law of Dedekind sum (jointly with M. Ishizaka), 第一回東北復旦代数幾何交流シンポジウム (東北大学), 2009 年 11 月 26 日.

(A8) 足利 正, Localization of signature of fibered complex surfaces, 2009 年度代数幾何学シンポジウム (兵庫県城崎大会議館), 2009 年 10 月 30 日.

(A9) T. Ashikaga, Signature divisor on moduli space of curves and its application, *Franco-Japan symposium on Singularity*, Strasbourg, FRANCE, 2009 August 27.

(A10) T. Ashikaga, Local signature of fibered surfaces and its application, *Conference on Algebraic surfaces and related topics*, Pohang, KOREA, 2009 August 19.

(A11) 足利 正, On local signature and Horikawa index of fibered surfaces, *Hodge 理論と代数幾何学* (京都大学数理解析研究所), 2009 年 6 月 29 日.

(2) 連携研究者による招待講演

(Y1) 吉川謙一, 解析の振率と BCOV 予想, 日本数学会企画特別講演 (東京理科大学), 2012 年 3 月 28 日.

(Y2) K. Yoshikawa, Resultants and Borchers Phi-function, *Automorphic forms and moduli spaces*, Centre International de Rencontres Mathématiques, Luminy, FRANCE, 2011 October 11.

(Y2) K. Yoshikawa, Analytic torsion and invariants of K3 and Calabi-Yau manifolds (I), (II), (III), *Differential Geometric Methods in Algebraic Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, INDIA, 2009 April 14, 15, 16.

(Y3) K. Yoshikawa, On the value of Borchers  $\Phi$ -function, Workshop on Arithmetic and Geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds, The Fields Institute for research in Mathematical Sciences, Toronto, CANADA, 2011 August 18.

(Y4) K. Yoshikawa, Singularities and analytic torsion, Geometric quantization in noncompact setting, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, GERMANY, 2011 February 15.

(Y5) K. Yoshikawa, Analytic torsion of certain Calabi-Yau threefolds and Borchers product, Automorphic forms, Kac-Moody algebras and Strings, The Max-Planck Institut für Mathematik, Bonn, GERMANY, 2010 May 11.

(Y6) K. Yoshikawa, An Introduction to Borchers Products (I), (II), (III), Holomorphically Symplectic Varieties and Moduli Spaces, Université Lille 1, Lille, FRANCE, 2009 June 2, 3, 5.

(K1) 今野一宏, Normal sextic surfaces which are canonical, 「高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何学」, 九州大学, 2012年3月16日

(K2) K. Konno, Regular canonical surfaces of degree  $3n-3$  in  $P^n$ , I and II, "Two Weeks of Classical Algebraic Geometry", Università di Padova, ITALY, 2011 May 16, 23.

(K3) 今野一宏, On Koyama singularities of fundamental genus 2, "Inequalities in Algebraic Geometry" (東京大学) 2009年11月11日.

(K4) 今野一宏, On Koyama singularities, "Syzygies of Projective Varieties" (佐賀大学理工学部) 2009年9月14日.

(K5) 今野一宏, Certain surface singularities of general type, "Hodge theory and algebraic geometry" (京大数理解析研究所) 2009年6月29日.

(I1) H. Ishida, A note on invariants of hyperelliptic fibrations, The 4-th Branched coverings, Degenerations and Related Topics (広島大学) 2012年3月7日.

(I2) 石田弘隆, 被覆を用いた有理曲面上の代数曲線の構成, 代数幾何目白セミナー 2011 (学習院大学) 2011年12月27日.

(I3) H. Ishida: An approach to the geography problem of hyperelliptic fibrations, 第9回代数曲線論シンポジウム (首都大学東京) 2011年12月11日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

足利 正 (ASHIKAGA TADASHI)

東北学院大学 工学部 教授

研究者番号: 90125203

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

吉川 謙一 (Yoshikawa Ken-ichi)

京都大学大学院 理学研究科 教授

研究者番号: 20242810

今野一宏 (Konno Kazuhiro)

大阪大学大学院 理学研究科 教授

研究者番号: 10186869

石田 弘隆 (Ishida Hirotaka)

宇部工業高等専門学校 一般科 准教授

研究者番号: 30435458