

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 24 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009 年度 ~ 2011 年度

課題番号：21540050

研究課題名（和文） 離散的な因子類群をもつ局所環とピカル数の研究

研究課題名（英文） Study of local rings with discrete class group and its Picard number

研究代表者

藏野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188

研究成果の概要（和文）：Gorenstein 孤立商特異点は、次元が奇素数であれば巡回商特異点であることを証明することに成功した。テータ不変量は、Grothendieck 群上での数値的同値の同値類上では定数になることを示した。テータ不変量の計算によって、3 次元の孤立超曲面が UFD でなければ、因子類群は torsion-free であり、そこでは必ず Dutta-Hochster-MacLauglin 型の反例が構成可能であることを証明した。

研究成果の概要（英文）：We proved that a Gorenstein isolated quotient singularity of odd prime dimension is a cyclic quotient singularity. We proved that the theta pairing defined by Hochster gives a pairing over the Grothendieck group divided by numerical equivalence. As a consequence, we proved that the class group of three dimensional isolated hypersurface singularity is torsion-free, and there always exists a counterexample of Dutta-Hochster-MacLauglin type if it is not a UFD.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：巡回商特異点、Cox 環、因子類群、テータ不変量、極大 CM 加群

1. 研究開始当初の背景

一般のネーター局所環のチャウ群に対して数値的同値が定義され、その数値的同値で割ることによって格子が得られることが、研究代表者の研究によってわかった。特に局所整閉整域上でチャウ群の余次元 1 の部分のみを考えた場合、因子類群上で数値的同値が定義され、それで割ると格子になるのである。(代数幾何学ではそうであるように、この格子が、交点理論を行う場所になるはずである。

ただ、代数多様体上の数値的同値とそのアフィンコーンの局所環上の数値的同値にはきれいな対応は無いので、そう単純には話が進まない。) 研究代表者は、その格子の性質(例えば階数)に興味を持っている。局所整閉整域上の因子類群の中で数値的同値なサイクルが 0 のみの場合、因子類群はそれ自身が格子であり、つまり離散的な因子類群を持つ。それが一番シンプルなケースである。一方、Danilov は、局所整閉整域に対して、

離散的な因子類群を持つという概念を定義した。彼の一連の因子類群の研究は、局所ピカルスキームの研究への道を切り開いたものであり、数学的な意味は深く理解され、高く評価されている。

2. 研究の目的

本研究の一つの目的は、Danilov の意味で離散的な因子類群を持つ環と、研究代表者の意味で離散的な因子類群を持つ環の相当・相違を明確にすることである。現在のところは、その両者の関係は、全くわかっていない。Danilov の意味で離散的な因子類群は、その環だけではなく、その完備化の因子類群も小さいことを導き出す。よって、数値的同値と完備化との関係の研究が、突破口になると考えている。局所環の完備化から誘導されるチャウ群の間の射に関しては、研究代表者は連携研究者と共に既に研究をスタートさせている。例えば、チャウ群の間の射が単射になるための十分条件をいくつか与えており、また torsion でない核を持つ例を挙げている。よって、「完備化によって、因子類群がどれだけ大きくなるのか？」また、「数値的同値で割った格子が、どれだけ大きくなるのか？」がわかると、離散的な因子類群に対する二つの定義の違いを理解するための手がかりになるはずである。本研究では、環が複素数体上スムーズな射影多様体のアフィンコーンの局所環の場合に限定して研究を行いたい。

3. 研究の方法

スムーズな射影多様体のアフィンコーンという特殊な局所整閉整域の場合、Danilov によって定義された離散的な因子類群を持つことと、研究代表者によって定義された離散的な因子類群を持つこととの関係を調べることが、本研究の主目的である。本研究は、次の2つの部分的な研究から成っている。

(1) Danilov による定義は、その環だけではなく、その環の完備化の性質でもある。局所環のチャウ群やグロタンディエック群の間に完備化が誘導する射の全射性・単射性を調べ上げることによって、両者の違いがわかるのではないかと期待している。この研究は、研究代表者の藏野和彦、連携研究者の鴨井祐二氏、海外研究協力者の V. Srinivas 氏によって行う。

(2) 局所環上の交点理論は、新しい局面を迎えている。研究代表者と海外研究協力者の Roberts 氏、Srinivas 氏で、局所環上での交点理論を構築するため、positive な元の候補である極大コーエンマコーレー加群の代数サイクルの例を計算し、その性質を調べ

る。研究代表者の藏野和彦の研究分野は、局所環上の交点理論である。連携研究者の鴨井祐二氏は、代数的 K-理論や ASL という環の圏に関する専門家である。海外研究協力者の Roberts 氏は、Serre 予想(の一部)を肯定的に解決した著名な数学者であり、局所環上の交点理論の分野では、世界の第一人者である。研究代表者は、彼から多くの影響を受けた。海外研究協力者の Srinivas 氏は、代数幾何学・代数的 K-理論・表現論・可換環論などで深い知識を持ち、幅広い分野で活躍を続けている著名な数学者である。

4. 研究成果

Gorenstein 孤立商特異点は、次元が奇素数であれば巡回商特異点であることを証明することに成功した。つまり「奇素数 n に対して、 $SL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群 G で単位行列以外の G の元は固有値 1 を持たないとき、 G は巡回群である」を示した。

Cox 環のような \mathbb{Z}^n 型の次数環に関しては、その因子類群や標準加群の記述に関して様々な研究がある。ここでは、 \mathbb{N}^n 型の次数環に関して、因子類群や標準加群の記述を行った。次数半群 \mathbb{N}^n の境界で定義される因子分だけ \mathbb{Z}^n 型の次数環とは違った結果が出てきた。

超曲面孤立特異点上の二つの有限生成加群の tor_i は、 i が十分大きいときは長さ有限であるし(孤立特異点だから)長さは i に関して周期 2 になる(matrix factorization より)。Hochster は、その偶数番目と奇数番目の長さの差をテータ不変量と呼び、それを研究した。この論文では、そのテータ不変量は、Grothendieck 群上での数値的同値の同値類上では定数になることを示した。このことから、例えば、テータ不変量の計算によって、3次元の孤立超曲面が UFD でなければ、因子類群は torsion-free であり、そこでは必ず Dutta-Hochster-MacLauglin 型の反例が構成可能であることを証明した。

Grothendieck 群や Chow 群を数値的同値で割ると有限生成の格子が得られる。それに、実数体をテンソルして有限次元ベクトル空間を考える。このことによって、ここで収束・発散などが議論できる。そのベクトル空間の中で、極大コーエン・マコーレー加群の張る錐を考える。この論文では、コーエン・マコーレー錐の基本性質を調べた。応用として、様々な Hilbert-Kunz 関数の例を構成することに成功した。そのような例が存在するかどうかは、知られていなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① K. Kurano, The divisor class groups and the graded canonical modules of multi-section rings, Nagoya Math. J., 査読有、掲載決定
- ② K. Kurano, S. Nishi, Gorenstein isolated quotient singularities of odd prime dimension are cyclic, Communications in Algebra, 査読有、40 号、2012、3010—3020
- ③ Y. Kamoi, Note on symmetric Hilbert series, Math. J. Okayama Univ., 査読有、53 号、2011、111-127
- ④ M. Hashimoto, K. Kurano, The canonical module of a Cox ring, Kyoto Journal of Math., 査読有、51 号、2011、855-874
- ⑤ S. D. Cutkosky, K. Kurano, Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane, Kyoto Journal of Math., 査読有、51 号、2011、25-45
- ⑥ K. Kurano, E.-i. Sato, A. K. Singh, K.-i. Watanabe, Multigraded rings, diagonal subalgebras, and rational singularities, J. Algebra, 査読有、322 号、2009、3248-3267
- ⑦ K. Kurano, N. Matsuoka, On finite generation of symbolic Rees rings of space monomial curves and existence of negative curves, J. Algebra, 査読有、322 号、2009、3268-3290

[学会発表] (計 17 件)

- ① 鴨井祐二, $(1, n, n, 1)$ 型の Betti 列をもつ ideal について、第 25 回可換環論セミナー、2013 年 2 月 2 日、奈良県新公会
- ② 藏野和彦, MCM 加群で張られる錐、第 34 回可換環論シンポジウム、2012 年 11 月 25 日、IPC 生産性国際交流センター (葉山)
- ③ 鴨井祐二, Gorenstein Rees algebras of codimension 3、第 24 回可換環論セミナー、2012 年 2 月 1 日、霧島市市民サービスセンター
- ④ 藏野和彦, The cone spanned by maximal Cohen-Macaulay modules、第 24 回可換環論セミナー、2012 年 1 月 30 日、霧島市市民サービスセンター
- ⑤ 藏野和彦, Symbolic Rees rings of space

monomial primes and Nagata conjecture、アフィン代数幾何学研究集会、2011 年 9 月 4 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス

- ⑥ 藏野和彦, Theta invariant and resolutions of singularities、特異点論とそのひろがり (ISHII60)、2011 年 8 月 25 日、京都大学理学部
- ⑦ K. Kurano, Asymptotic behavior of regularity of powers of ideals、2011 NIMS hot topics workshop on "Computational Aspects on Birational Geometry"、2011 年 3 月 31 日、NIMS, (Daejeon, 韓国)
- ⑧ 鴨井祐二, CI Rees algebras、第 23 回可換環論セミナー、2011 年 1 月 31 日、山口県総合保険会館
- ⑨ 藏野和彦, Canonical module of multi-section rings、第 3 2 回可換環論シンポジウム・第 6 回 JV セミナー、2010 年 12 月 16 日、IPC 生産性国際交流センター (葉山)
- ⑩ K. Kurano, The canonical module of a Cox ring, Workshop on Local Rings and Local Study of Algebraic Varieties、2010 年 6 月 10 日、ICTP (Trieste, Italy)
- ⑪ 鴨井祐二, Gorenstein Rees algebras of almost complete intersections、第 22 回可換環論セミナー、2010 年 2 月 3 日、松本市中央公民館
- ⑫ 藏野和彦, Asymptotic regularity of symbolic powers of ideals, Seminar on commutative algebra、2010 年 1 月 29 日、大阪大学理学部
- ⑬ K. Kurano, Asymptotic regularity of powers of ideals of points in a weighted projective plane, The 5th Japan-Vietnam joint seminar on commutative algebra、2010 年 1 月 5 日、Institute of Mathematics (Hanoi, Vietnam)
- ⑭ 藏野和彦, Regularity of the symbolic powers of space monomial curves、第 3 1 回可換環論シンポジウム、2009 年 11 月 24 日、ホテルアウイーナ大阪
- ⑮ 藏野和彦, Regularity of symbolic powers of ideals of Nagata type, "研究集会 Syzygies of Projective Varieties"、2009 年 9 月 12 日、佐賀大学工学部
- ⑯ K. Kurano, Nagata conjecture and symbolic Rees rings of space monomial curves, "1st PRIMA"、2009 年 7 月 6 日、UNSW (Sydney, オーストラリア)
- ⑰ K. Kurano, Nagata conjecture and symbolic Rees rings of space monomial curves, "Kommutative Algebra"、2009 年

4月23日、Oberwolfach (MFO, ドイツ)

[その他]

ホームページ等

Kurano's Home Page

<http://www.math.meiji.ac.jp/~kurano>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藏野 和彦 (KURANO KAZUHIKO)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90205188

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

嶋井 祐二 (KAMOI YUJI)

明治大学・商学部・講師

研究者番号：80308064