様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　18　日現在

機関番号：32702
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：21540051
研究課題名（和文）　符号と有限幾何の視点による代数曲線論

研究課題名（英文）　A study of algebraic curves from viewpoints of the coding theory and the finite geometry
研究代表者
本間 正明（HOMMA　MASAAKI）
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：80145523

研究成果の概要（和文）：

以下に述べるような定理が証明できた．これは，Sziklai 予想の解決となっている．$F(X,Y,Z)$を，係数を q 元体 F_q に持つ X,Y,Z についての次数 d の斉次多項式とし，これで定まる平面曲線を C，C の F_q 点全体，すなわち，$C(F_q)=\{(x,y,z)\in P^2(F_q)\mid F(x,y,z)=0\}$ を考え，この集合の個数を $N_q(C)$ で表す．

定理．$F(X,Y,Z)$が X,Y, Z についての F_q 係数の 1 次式では割り切れないものとする．このとき，本質的には唯一つの例外を除けば，

$$N_q(C) \leq (d\text{-}1)q+1$$

が成り立つ．唯一つの例外とは，$d=q=4$ で, $F(X,Y,Z)$が F_4 係数の 1 次変換で

$$(X+Y+Z)^4+(XY+YZ+ZX)^2+XYZ(X+Y+Z)$$

に移る場合である．

また，次数 d の非特異曲線 C で上の不等式で等号をとるようなものが存在するための d についての必要十分条件は d が $q+2, q+1, q, q-1, \sqrt{q}+1$ (ただし，q が平方数), 2 のいずれかの場合である．

研究成果の概要（英文）：

We found the following facts. Let F_q be the finite field of q-elements, and $F(X,Y,Z)$ a homogeneous polynomial of degree d over F_q. We consider the plane curve C defined by $F(X,Y,Z)=0$. Suppose that C has no F_q-linear component. Let $N_q(C)$ denote the number of the set of F_q -points of C. Then we have

Theorem. Unless C is a curve defined over F_4 which is projectively equivalent to

$$(X+Y+Z)^4+(XY+YZ+ZX)^2+XYZ(X+Y+Z),$$

the inequality

$$N_q(C) \leq (d-1)q+1$$

holds true.

Moreover, there exists a nonsingular curve of degree d which attains the bound above if and only if d is one of the following numbers $\{q+2, q+1, q, q-1, \sqrt{q}+1$ (if q is a square), $2\}$.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：代数幾何学・組み合わせ論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：平面代数曲線，有限体，有理点の個数，Sziklai 予想

１．研究開始当初の背景

有限体上定義された代数方程式の有理点の個数についての研究は，有限体という言葉は用いなかったものの，Gauss の時代にまで遡る．特にそれが，代数曲線をなすときは Weil の 1948 年の合同ゼータ関数についての Riemann 予想の証明が大きな到達点であった．その後，多くの代数幾何・数論研究者の興味は一般の代数多様体の Weil 予想へと向かったが，1980 年代初頭の Goppa による代数曲線符号の構成とその応用としての Tsfasman-Vladut-Zink による Gilbert-Varshamov bound を越える符号列の構成をきっかけに，具体的な代数曲線の有理点の個数や配置についての詳細な研究に世上の興味が高まった．このような流れの中で，2008 年に Sziklai が Finite Fields and Their Application 誌に，平面曲線について，ひとつの予想を提起した．

２．研究の目的

前項に記した Sziklai 予想とは，有限体 $\mathbf{F}_q$ 上定義された，$\mathbf{F}_q$-linear な既約成分を持たない次数 d の平面射影曲線の $\mathbf{F}_q$ 点の個数は (d-1)q+1 を越えないであろうというものであった．この予想をひとつの作業仮説として，有限体上定義された代数曲線の有理点について研究することが目的であった．
また，このような良い限界式が確立されれば，符号理論へ応用できるのではないかという目論見もあった．

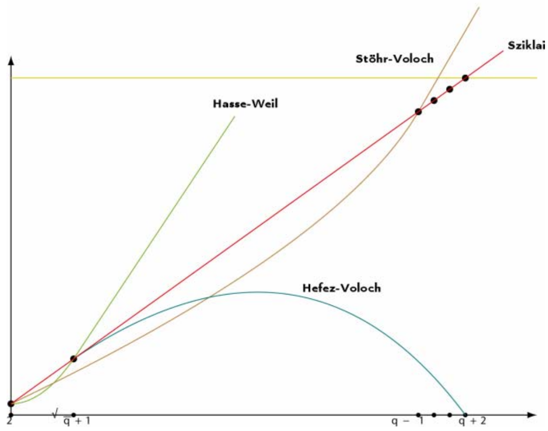
３．研究の方法

この研究も研究代表者の過去 10 年以上にわたる主要な研究と同様に，韓国 GyeongSang National University の Seon Jeong Kim 教授との共同研究として行われた．相互に時機を見て往来することにより，年間で２ヶ月ほどの直接に討論する機会を確保できた．本科学研究費補助金により，研究代表者が韓国に赴いた日程は以下の通りであった： 2009 年 7 月 31 日より 8 月 16 日まで(17 日間)； 2010 年 2 月 18 日より 3 月 3 日まで(14 日間)；3 月 18 日より 24 日まで(7 日間)；10 月 24 日より 11 月 3 日まで(11 日間)；2011 年 10 月 23 日より 11 月 2 日まで(11 日間)；2012 年 2 月 16 日より 3 月 4 日まで(18 日間)；3 月 13 日より 3 月 23 日まで(11 日間)．
また，研究の区切り毎に，学会発表の項に記したように研究集会で結果を公表し，関連研究者との議論ができたことは，研究の進展に有意義であった．

４．研究成果

「研究成果の概要」の項で述べた記法をそのまま用いる．

Sziklai 予想の解決には，3 本の論文を要した．その順に内容を説明する．まず，予想の上界は d = q+2 のとき，ちょうど F_q 上の射影平面の有理点の個数に一致し，d>q+2 では，それを上回るので，2≤d≤q+1 の場合についてだけ考えれば十分であることを注意する．2009 年の論文⑤では，d=q=4 のとき，概要で記した曲線が予想の反例(この曲線は F_4–有理点を 14 個持つが，予想に述べられた上界の値は，この場合 13 である．）になるが，d=q+1 の場合にはこの不等式が正しいことを証明し，またこの場合には等号をとる例が実際に存在することを示した．



続いて，2010 年の論文④では，概要の定理を非特異な曲線にかぎってではあるが確立した．また，この論文の中で，この不等式が既約な曲線について成立すれば，一般の場合についても概要の定理に記述した曲線を唯一の例外として，この不等式が成立することをも示した．

前者の結果についてもう少し詳しく述べる．上記の図は問題の上界と他の既知の上界との関連を示している．次数 d は水平軸を動き，垂直軸を N が動く．赤い直線が我々が問題にしている上界であり，黄色い水平な直線が q^2+q+1，すなわち，F_q 上の射影平面の有理点の個数を示す．緑色の下に凸な２次曲線は Hasse-Weil 上界，茶色の下に凸な２次曲線は q-Frobenius classical とよばれる曲線にのみに有効な，Stohr-Voloch 上界，また青い上向き凸な 2 次曲線は特異点を持たない

q-Frobenius nonclassical 曲線の次数と有理点の個数の組みはちょうど，この２次曲線上にあるという，Hefez-Voloch の結果を表している．したがって，問題を特異点を持たない曲線に限ってしまえば，この図より，d=q+1 と d=q の場合だけが問題となることが容易に理解されよう．d=q+1 の場合は前論文で証明してあるので，d=q の場合のみを考えれば良い．実は，論文⑤の方法により，この場合にも，$N_q(C) \le (q-1)q+2$ であるということは分かっていた．(従って，例外の場合 d=q=4 のときには，例外の曲線が有理点の最大個数を与えるということが，この時点で分かっていたわけである．） よって，$N_q(C) = (q-1)q+2$ ということが起きないということを示せば十分である．これを，一般の次数 q の方程式を書いて，$N_q(C) = (q-1)q+2$ であると矛盾が生じるという方法で示した．(この事，すなわち d=q の場合の証明には C が特異点を持たないということは用いていない．）

以上の結果，残った場合は，d ≤q-1 で特異点をもつような，q-Frobenius nonclassical 曲線のとき，となった．ここが，今回の一連の研究で最も手こずった部分であったが，結局は 20 年ほど前に研究代表者が q-Frobenius nonclassical 曲線について調べてあった知識を論文⑤で用いた手法の一般化と組み合わせることにより，最終的な解決に達し，これを論文③としてまとめた．なお，この結果は，Couvreur (Finite Fields Appl. 17 (2011)) により符号理論に応用されている．

ここで確立された限界式，すなわち唯一の例外を除けば，$N_q(C) \le (d-1)q+1$ であるという事実を真に意味あるものとする為に，この限界式に到達する曲線の分類を完成させることが望ましい．これについては，d=2, d=$\sqrt{q}+1$ については，唯一つしかないことが，既知であった．我々は，論文②および①により d=q+1 と d=q の場合についてその分類を完成させたが，未だ，全ての次数についての完全な分類には至っていない．

なお，ここまでの研究で得られたこの限界式に到達する曲線には，特異点を持つものが全く現れない．これは注目すべきことであろうと思われる．

また，F_q 上定義された高次元射影空間内の曲線の有理点の個数をその次数により評価することにも，この研究での手法を応用できるのではないかと思う．

さらに将来への展望を述べれば，高次元射影空間内の超曲面について，同様なアプローチを行うことは，興味深いことであろうし，可能なことだと思われる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① M. Homma and S. J. Kim, The uniqueness of a plane curve of degree q attaining Sziklai's bound over F_q, 査読有, Finite Fields and Their Applications 18 (2012) 567-580

② M. Homma and S. J. Kim, Toward determination of optimal plane curves with a fixed degree over a finite field, 査読有, Finite Fields and Their Applications 17 (2011) 240-253

③ M. Homma and S. J. Kim, Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field III, 査読有, Finite Fields and Their Applications 16 (2010) 315-319

④ M. Homma and S. J. Kim, Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field II, 査読有, in: Finite Fields: Theory and Applications G. McGuire, G.　L. Mullen, D. Panario and I. E. Shparlinski (eds.), (Contemporary Mathematics 518) AMS, Providence 2010, 225-234

⑤ M. Homma and S. J. Kim, Around Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field, 査読有,Finite Fields and Their Applications 15 (2009) 468-474

〔学会発表〕（計　５件）

① Masaaki Homma, A bound on the number of points of a curve in projective space over a finite field, The 10th International Conference on Finite Fields and their Applications, 2011 年 7 月 15 日, University of Ghent , Ghent, Belgium

② Masaaki Homma, Rational curves with many rational points over a finite field, Conference on "Arithmetic, Geometry and Coding Theory", 2011 年 3 月 14 日, CIRM, Marseille, France

③ Masaaki Homma, On the number of points of plane curves over a finite field with many points and Sziklai’s conjecture, Workshop: Coding Theory and Geometry, 2010 年 8 月 5 日, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, USA

④ Masaaki Homma, Sziklai conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field, 10th ALGA Meeting, 2010年7月7日, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil

⑤ Masaaki Homma, A study of the rationalpoints of a plane curve with a conjecture of Sziklai, 2009年9月15日, Divan Talya Hotel, Antalya, Turkey

６．研究組織

(1)研究代表者
本間 正明（HOMMA MASAAKI）
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：80145523

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

(4)海外研究協力者
金 善正（KIM SEONJEONG）
国立慶尚大学校・自然科学大学・教授
大韓民国

千 恩珠（CHEON EUNJU）
国立慶尚大学校・自然科学大学・ポスドク研究員
大韓民国