様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　１１日現在

機関番号：３２７１４
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５４００５２
研究課題名（和文）　代数曲線上のワイエルシュトラス点に関するフルヴィッツの問題

研究課題名（英文）　Hurwitz' problem on Weierstrass points on algebraic curves

研究代表者
米田　二良（KOMEDA JIRYO）
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065

研究成果の概要（和文）：数値半群が，代数曲線から得られるための計算可能な必要十分条件を求める問題をフルヴィッツの問題と呼ぶ．この問題は，まだ解決できていないが，次のような結果を得た．8 または 12 で始まる数値半群には代数曲線から得られないものがある．数値半群 H に属する偶数を 2 で割って得られる数値半群を d(H)としたとき，d(H)の種数が 3 または 4 で，H の種数が d(H)の種数の 3 倍以上のとき，H は代数曲線から得られる．d(H)の種数が 5 以上のときは，代数曲線から得られない H の例がある．

研究成果の概要（英文）：We are interested in Hurwitz' Problem which is the following: Find a necessary and sufficient computable condition on a numerical semigroup to be attained by a pointed curve, i.e., to be Weierstrass. This problem is not solved yet. But we got the following results: (1) Not every numerical semigroup whose minimum integer is eight (resp. twelve) is Weierstrass. (2) For a numerical semigroup H we denote by d(H) the numerical semigroup consisting of h/2 for even integer h in H. If the genus of d(H) is either 3 or 4 and the genus of H is larger than or equal to three times the genus of d(H), then H is Weierstrass. (3) We showed the following: If the genus of d(H) is larger than or equal to 5, the statement　like (2) does not hold.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	1,900,00	570,000	2,470,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：非特異代数曲線、ワイエルシュトラス点、ワイエルシュトラス半群、二重被覆、有理線織面、平面代数曲線、数値半群

１．研究開始当初の背景

負でない整数全体のなす加法モノイドの部分モノイド H で，補集合が有限であるものを数値半群と呼ぶ．1893 年にフルヴィッツは，「すべての数値半群はワイエルシュトラス半群か」という問題を提出した．これが，フルヴィッツの Original Question である．ここで，数値半群 H がワイエルシュトラス半群とは，ある一点付き代数曲線(C,P)が存在して，P のみで極をもつ C 上の有理関数のその極の

位数全体の集合H(P)がHになるときにいう．また，この H(P)を点 P のワイエルシュトラス半群とも呼ぶ．ここでいう代数曲線とは標数０の代数閉体上定義されている非特異射影既約代数曲線のこととする．この Question に否定的解答を与えたのは Buchweitz で，1980 年のことである．Buchweitz は，数値半群がワイエルシュトラスでない計算可能な条件を与えた．この条件が必要十分条件でないことを二重被覆の考えを使って示したのが Stöhr-Torres で，1994 年のことである．その後の数値半群がワイエルシュトラスであるかどうかに関連して興味を持っている結果は以下のものであった．

(1) 数値半群で，それに属している最小正整数が m のとき，m-半群と呼ぶ．m が 5 以下のとき，m-半群はワイエルシュトラス半群であることが知られている．また，m が 13 以上のとき，ワイエルシュトラスでない m-半群が存在する．

(2) 種数が 2 以下の代数曲線の二重被覆上の分岐点のワイエルシュトラス半群は決定されている．種数が２のときは，二重被覆の種数は６以上とする．

(3) 平面代数曲線の間の二重被覆は完全に決定されている．

(4) 数値半群 H に対して，Torres の定理の逆である「d(H) がワイエルシュトラスで g(H) が 6g(d(H))+4 以上のとき，H もワイエルシュトラスである」は成立するかどうか知られていなかった．ここで，g(H) は H の種数で，H の負でない整数全体の中での補集合の位数のことである．

(5) 与えられた数値半群 H に対して，より種数の低い数値半群を対応させるのは d(H) とその類似で 3 以上の整数 n に関して，n の倍数でHに属している整数をnで割って得られる数値半群以外は研究されていなかった．

(6) 平面代数曲線の２重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群については殆ど知られていなかった．

(7) 曲面上の代数曲線のワイエルシュトラス半群については，射影平面，すなわち平面代数曲線と，有理線織面上の低い種数の代数曲線，そして，有理線織面のブローアップ，ブローダウンで構成される有理曲面にのっている超楕円曲線の二重被覆以外については殆ど知られていなかった．

２．研究の目的

代数曲線上のワイエルシュトラス点に関するフルヴィッツの問題「 数値半群が，ワイエルシュトラス半群であるための計算可能な必要十分条件を与えよ」を主に以下の考えで解決することである．

(1) 代数曲線の２重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群の解析,

(2) 有理線織面上の因子の理論,

(3) 数値半群から作られる単項スキームのアフィン・トーリック多様体への埋め込みの可能性を調べる．

３．研究の方法

(1) 平面代数曲線のワイエルシュトラス半群については，低い次数の場合と接線の接触度が高い場合には良く知られている．高い次数で接線の接触度が高くない場合に，この方法の一般化を考える．

(2) 平面代数曲線のワイエルシュトラス半群の計算方法を射影平面でない代数曲面上の代数曲線にも適用できるように一般化する．たとえば，有理線織面で出来るようにする．

(3) 期待される代数曲線の二重被覆が構成できるようにするために，その代数曲線の持つ性質を詳しく調べる．

(4)数値半群の性質をその種数を１下げることやそれに属している偶数を２で割ってできる種数が小さくなる数値半群を通して調べ，ワイエルシュトラス半群の研究に役立てる．

４．研究成果

フルビッツの問題を解くことが代数曲線論の発展に大きく寄与すると思われる．また，数値半群の観点から見た場合，整数論の諸問題とも関連すると考えられる．さらに，代数曲面上の代数曲線，すなわち因子の研究を通して代数曲面の研究にも役立つと考えている．フルビッツの問題は，解けてはいないが，以下に述べるような多くの進展があった．

(1)d(H)の種数が２で，H の種数が６以上のとき，このＨは種数２の代数曲線の二重被覆上の分岐点のワイエルシュトラス半群として得られることを示していたが，H の種数が 6 以下でも，連携研究者の大渕教授と研究協力者の春井氏との共同研究で同様のことを示した．この結果は，代数幾何ミニ研究集会

（埼玉大学）の電子報告集に掲載されている．射影曲線や楕円曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群は古典的な結果であるが，この我々の結果により，種数 2 の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群も完全に決定されたことになる．

(2)代数曲線の二重被覆の上と下の分岐点のワイエルシュトラス半群の関係を代数化した数値半群Hとd(H)の関係を代数曲線から得られるワイエルシュトラス半群になっているかどうかの観点からみてまとめた．この結果の要約がRIMSの講究録に掲載されている．フルビッツの問題を解くためのキーポイントの一つが，二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群の解明であると思われるので，この結果は重要である．

(3)海外共同研究者の金善正教授との共同研究で次数が6までの平面代数曲線のワイエルシュトラス半群を決定した．また，次数7までの平面代数曲線が対合を持つ場合で，その対合による商曲線の分岐点のワイエルシュトラス半群を決定した．これらの結果は2009年に Journal of Algebra から出版された．次数7の平面代数曲線の点のワイエルシュトラス半群についてはあまりわかっていないが，この結果を通してある程度の新しい結果が導けると考えている．

(4)数値半群が代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群になり，かつそれに付随する単項スキームがアフィン・トーリック多様体に埋め込まれている多くの例を作った．この結果は神奈川工科大学研究報告で 2010 年に出版された．これらの例は，アフィン・トーリック多様体と二重被覆というフルビッツの問題を解くときに重要なツールを結びつけるものであるので，今後の研究に役に立つと考えられる．

(5)平面代数曲線 C が自明でない自己同型σを持つとき，C をσで生成される自己同型部分群＜σ＞で割った時の商曲線について，研究協力者の春井氏，連携研究者の大渕教授，そして山口大加藤名誉教授と共同で調べた．これらCの自己同型σを射影平面に拡張すると二つのタイプに分類されるが，一つのタイプについては決定した．この結果については，4 名の共著として Kodai Mathematical Journal から出版された．これは平面代数曲線のワイエルシュトラス半群を調べるときに重要な役割を果たす．また，extremal curve とよばれる代数曲線の点のワイエルシュトラス半群の研究にも役に立つと思われる．

(6)数値半群Hに対して，Hに属していない最大の整数を H のフロベニウスの数と呼び，f(H)で表す．H に f(H)を加えた集合を p(H)と表すと，これはHより種数が1小さい数値半群になっている．Hの性質でp(H)から来ているものがあるので，p(H)を調べることが重要である．また，この対応を何度も繰り返すことでチェインができる．H, p(H) が共にワイエルシュトラスでない多くの例やワイエルシュトラスでない数値半群から成る無限のチェインの例等を構成し，2010 年 2 月にRIMSの研究集会で口頭発表し，その内容が講究録に掲載された．このワイエルシュトラスでない無限のチェインはワイエルシュトラスでない半群を特徴づけるのに役に立つことが期待される．

(7)数値半群Hに対して，f(H)+1 をc(H)と表し，Hの導手と呼ぶ．このとき，c(H)は2g(H)以下である．c(H)=2g(H)のときは，H はある種の対称性を持っていて対称数値半群と呼ばれる．それで c(H)=2g(H)-1 のような H に対して，対称数値半群で成立することがどの程度成立するかを調べた．それをまとめた結果が神奈川工科大学研究報告で 2011 年に出版された．対称数値半群は以下に見るようにフルビッツの問題を解くときにキーになるものである．よって，対称数値半群に最も近い数値半群を調べておくことは意義がある．

(8)フルヴィッツの問題は，対称数値半群 H で g(H)>6g(d(H))+3 を満たすものについて解ければよいことを示した．この結果については，2011 年 2 月に RIMS の研究集会で口頭発表し，その内容の要約が講究録に掲載された．この結果は，フルビッツの問題を解くための大きな進展といってよい．

(9)数値半群Hについて d(H)の種数が 3 で H の種数が 9 以上の時，このようなHは種数3の代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として得られることを示した．この結果は，2011年にSemigroup Forum から出版された．このように種数3についてもHの種数が9以上の場合には，種数2以下と同様に問題は解決された．H の種数が 8 以下の場合も，研究協力者春井氏と共同研究を進めていて，d(H)が4,5,6,7で生成されているものを除くと解決している．

(10)Hとd(H)が共に対称数値半群で代数曲線のある点のワイエルシュトラス半群であるようなことが起こりうる種数g(H)とg(d(H))の関係を決定した．この結果は 2012 年に出版された神奈川工科大学研究報告に掲載された．二重被覆と対称数値半群は，フルビッツの問題を解くのに重要で，これらの関係を代数的に調べることは意義がある．

(11)Torres の定理とあるタイプの二重被覆の性質を詳しく調べた結果を組み合わせて，ワイエルシュトラスでない数値半群を構成する新しい手法を開発した．この方法で，今まで知られていなっかたワイエルシュトラスでない 8 半群と 12 半群を初めて見つけることができた.この結果はCommunications in Algebra で受理された．今までは，6 以上 12 以下の m については，すべての m-半群がワイエルシュトラスかどうかは未解決の問題であった．ワイエルシュトラスでない数値半群をみつける新しい方法を確立することがフルビッツの問題を解決することにつながる．この結果より，Buchweitz と Stöhr-Torres の方法だけではすべてのワイエルシュトラスでない数値半群が構成できないことがわかった．

(12)d 次平面代数曲線が対合を持つ場合で接線との接触度が d-4 以上の点 P がこの対合で固定されている場合を考える．そして，この対合による商曲線をとる．このとき，点 P の商曲線への像のワイエルシュトラス半群をすべて決定した．証明の手法は位数 2 の有理線織面のブローアップ，ブローダウンを使い，平面代数曲線の点のワイエルシュトラス半群を決定するときに使う方法と類似のやり方で示した．これは連携研究者の大渕教授との共同研究である．この結果は，Tsukuba Journal of Mathematics で受理されている．d 次平面代数曲線上の点で接線との接触度が d-4 以下については，ワイエルシュトラス半群はよく分かっていない．しかし，この結果によって接触度が d-4 の場合には，今まで分かっていない情報が得られると思われる．また，有理線織面上の新しいタイプの代数曲線の点のワイエルシュトラス半群が計算できたことも意義がある．

(13) 数値半群 H について d(H)の種数が 4 で H の種数が 12 以上の時，このような H は種数 4 の代数曲線の二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として得られることを示した．これは海外共同研究者の金善正教授との共同研究で，現在，雑誌に投稿中である．種数 4 の場合に種数 3 以下の場合と同様のことが成立することが分かったが，d(H)の種数が 5 以上の場合には，すべての種数で二重被覆の分岐点のワイエルシュトラス半群として得られない H がある．これは，もっと強く H がワイエルシュトラスでないことも示される．よって，この結果はシャープであることを示しているので意義があると考えている．

(14)H を数値半群として，H に属する最小の奇数を n(H)，最小の正の整数を m(H)で表す．今，$n(H)>c(H)+m(H)-2$ を仮定すると，g(H)は $2g(d(H))+(n-1)/2$ 以下になる．ここで，d(H) がワイエルシュトラスでなくて，$g(H)>6g(H)+4$ を仮定する（このとき，$n(H)>c(H)+m(H)-2$ になる）．すると Stöhr-Torres の結果より，H も p(H)もワイエルシュトラスでないことが示される．同様の問題を，d(H)がワイエルシュトラスの場合に考える．このとき，$g(H)=2g(d(H))+(n-1)/2$ の下では，d(H)がワイエルシュトラスなら，H も p(H)もワイエルシュトラスであることを示した．また，$g(H)=2g(d(H))+(n-1)/2-1$ の下で，$c(H)=2g(H)$ または $2g(H)-1$ の場合にも同様のことが成立することを示した．しかし，$c(H)=2g(H)-2$ のときは，たとえ d(H)がワイエルシュトラスでも，H がワイエルシュトラスでなく，p(H)はワイエルシュトラスであることが起こることを示した．この結果はフルヴィッツの問題を解くための重要なきっかけを与えているように思われる．何故なら，ワイエルシュトラスでない H からワイエルシュトラスである d(H),p(H)に変わるところの例になっているからである．この内容については現在，論文を執筆中である．

(15)K3 曲面上の代数曲線の点のワイエルシュトラス半群について，連携研究者の大渕教授，研究協力者の春井氏，渡邊健太氏と共に共同研究を始めている．現在のところ，このようなワイエルシュトラス半群として得られない多くの数値半群を見つけている．K3 曲面にのっている代数曲線の点のワイエルシュトラス半群の研究は皆無に等しい．よって得られる結果の多くが K3 曲面の研究を別の角度からアタックする道筋を与えることになると思われるので，有意義なものであると考えている．

(16)連携研究者の大渕教授と共に毎年，代数曲線論シンポジウムを開催した．2009 年度は横浜国立大学サテライト・キャンパスで野間淳氏の協力の下，12 月 5 日から 6 日の２日間開催し，講演者は国内の研究者の 9 名であった．参加者は 27 名であった．また，85 ページからなる報告集を作成し，参加者に配布した．2010 年度は埼玉大学で，酒井文雄教授の協力の下，12 月 11 日から 12 日の２日間開催した．講演者 10 名で，韓国ソウル大学から１名，講演者として招待した．参加者は 34 名であった．また，95 ページからなる報告集を作成し，参加者に配布した．2011 年度は首都大学東京南大沢キャンパスで，12 月 10 日から 11 日の 2 日間開催した．講演者は国内の研究者で 10 名であった．参加者は 40 名であった．また，90 ページからなる報告集を作成し，参加者に配布した．代数曲線論シンポジウムを毎年開催することで，特に代数曲線論に関連することを研究している国内の若

手研究者に発表の機会，そして交流の場を与えることが出来，代数曲線論のこれからの発展に寄与できていると考えている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）

① J. Komeda, A. Ohbuchi, “Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces” 査読有 To appear in Tsukuba J. of Math.

② J. Komeda, “ Double coverings of curves and non-Weierstrass semigroups” 査読有 To appear in Communications in Algebra

③ J. Komeda, ”Symmetric Weierstrass numerical semigroups whose quotients by two are also symmetric and Weierstrass 査読有，神奈川工科大学研究報告 B-36, 35-39 (2012)

④ J. Komeda, “On Weierstrass semigroups of double coverings of genus three curves” 査読有 Semigroup Forum, 83, 479-488 (2011)

⑤ J. Komeda, “Numerical semigroups of double covering type and Hurwitz' problem” 数理解析研究所講究録 1769, 60-65 (2011)

⑥ J. Komeda, “On quasi-symmetric numerical semigroups” 査読有，神奈川工科大学研究報告 B-35, 17-21 (2011)

⑦ J. Komeda, “The Parents and the Children of Non-Weierstrass Semigroups” 数理解析研究所講究録 1712, 58-63 (2010)

⑧ G. Harui, T. Kato, J. Komeda, A. Ohbuchi, “Quotient curves of smooth plane curves with automorphisms” 査読有 Kodai Mathematical Journal, 33, 164-172 (2010).

⑨ J. Komeda, “The numerical semigroup of toric type at a ramification point on a double covering of a curve” 査読有，神奈川工科大学研究報告 B-34, 57-62 (2010)

⑩ J. Komeda, S.J. Kim, “The Weierstrass semigroups on the quotient curve of a plane curve of degree <=7 by an involution” 査読有 J. Algebra, 322, 137-152 (2009)

⑪ J. Komeda, “A generalization of Weierstrass semigroups on a double covering of a curve” 数理解析研究所講究録 1655, 124-131 (2009)

⑫ J. Komeda, ”Weierstrass semigroups on a double covering of a curve of lower genus” 電子報告集　代数幾何ミニ研究集会（埼玉大学）(2009)

〔学会発表〕（計 9 件）

① J. Komeda, “Diagrams of Weierstrass semigroups constructed from the parent map and the quotient map by two” Algebraic Geometry Seminar in Seoul National University, 2012/03/22, 韓国・ソウル大学

② J. Komeda, “The Fractional Map by Two and the Parent Map of Numerical Semigroups” RIMS 研究集会「代数系および計算機科学基礎」, 2012/02/22, 京都大学数理解析研究所

③ J. Komeda, “Numerical semigroups which are the double covering type and Hurwitz' problem”　RIMS 研究集会「代数と言語のアルゴリズムと計算理論」, 2011/02/21, 京都大学数理解析研究所

④ J. Komeda, “Weierstrass semigroups on double coverings of non-singular plane curves of degree 5”　代数幾何講演会，2010/12/14, 埼玉大学

⑤ J. Komeda, “Non-Weierstrass numerical semigroups' genealogy” Algebraic Geometry Seminar in Seoul National University, 2010/09/01, 韓国・ソウル大学

⑥ J. Komeda, “Weierstrass semigroups on double coverings of curves of genus 3 or 4”　Workshop on Galois point and related topics, 2010/06/05, 神奈川大学富士見高原研修所

⑦ J. Komeda, “Weierstrass semigroups on double coverings of curves”　Mini Festival on Algebraic Curves, 2010/03/23, 韓国・ソウル大学

⑧ J. Komeda, “The parents and the children of non-Weierstrass semigroups” 京都大学数理解析研究所研究集会「代数と言語のアルゴリズムと計算理論」, 2010/02/17, 京都大学数理解析研究所

⑨ J. Komeda, “On Weierstrass pairs on a curve and Weierstrass semigroups on a double covering of the curve” Workshop on Galois points and related topics, 2009/06/06, 神奈川大学富士見高原研修所

〔その他〕
ホームページ等
http://www.gen.kanagawa-it.ac.jp/~komeda/komeda_labo.html

６．研究組織
(1)研究代表者
米田　二良（KOMEDA JIRYO）
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065
(2)連携研究者
大渕　朗（OHBUCHI AKIRA）
徳島大学大学院ソシオアーツアンドサイエンス研究部・教授
研究者番号：10211111