

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 21 日現在

機関番号：36102

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：平成 21 年度 ~ 平成 23 年度

課題番号：21540056

研究課題名（和文） 整環の総合的研究とその応用

研究課題名（英文） A study of integrated orders and its applications

研究代表者 丸林 英俊 (Marubayashi, Hidetoshi) 徳島文理大学

研究者番号：00034702

研究成果の概要（和文）：下記の 5 つの環の代数的構造を、主として、研究した。

- (1) 半単純 Artin 環上の歪部分多項式環に 3 つの異なる中心的幂等元が存在することを示した。更に、素根基の構造を決定すると共に素イデアルは極大イデアルで単項、又は幂等元であることを示した。
- (2) 非可換付値環上の Ore 拡大は常に一般的 Bezout 環になることを示した。更に、Ore 拡大が十分に有界である必要且つ十分条件を見つけた。
- (3) 非可換付値環上の接合積の素イデアルを分類することができた。
- (4) プリユアール環の局所システムを素イデアルを用いて分類することができた。
- (5) 可換 Dedekind 環上の歪多項式環の素イデアルを分類し、素商環の構造を決定した。

研究成果の概要（英文）：We have mainly studied the algebraic structure of the following five different types of rings.

- (1) Let R be a partial skew polynomial ring over a semi-simple Artinian ring. We proved there are three different central idempotent in R . Furthermore we determined the structure of prime radical of R and proved that any prime ideals of R is either a maximal ideal and principal or idempotent.
- (2) Let R be an Ore extension over a non-commutative valuation ring. We proved that R is always a generalized Bezout. Further we obtained that a necessary and sufficient conditions for R to be fully bounded.
- (3) We classified the prime ideals of crossed product algebras over non-commutative valuation rings.
- (4) We classified the localizing system of Prufer rings.
- (5) We classified the prime ideals in skew polynomial rings over commutative Dedekind domain and determined the structure of the prime factor rings.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
21 年度	700,000	210,000	910,000
22 年度	600,000	180,000	780,000
23 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,900,000	570,000	2,470,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数物系科学・代数学

キーワード：環論

1. 研究開始当初の背景

Ore extensions, skew polynomial rings, 及び partial skew polynomial rings の研究は、主として、イデアルの構造を研究することが主流であった。

2. 研究の目的

Ore extensions, skew polynomial rings, partial skew polynomial rings の代数的構造を、quantum type algebras, C*-algebras への応用を視野に入れながら、研究すること。

3. 研究の方法

研究分担者 植田 玲 (島根大学)、及び海外共同研究者 H. Brungs(Alberta Univ. Canada), G.Xie(Gaungxi Normal Univ. China)を本学に招聘し、また、F. Van Oystaeyen(Antwerp Univ. Belgium)を訪問し研究を推進した。

4. 研究成果

(1) R を semi-simple Artinian ring で partial action α を持つとする。更に、 $R[x; \alpha]$ を partial skew polynomial ring とする。 R の central idempotents が3つの異なるタイプに分類できる。この分類を基にして、 $R[x; \alpha]$ の prime radical, 及び prime ideals の構造を完全に決定することができた。特に、prime ideals は maximal で principal, 又は idempotent であることを示した。

これらの成果は C*-algebras への応用が期待される。

代数的立場からの研究では、係数環を semi-prime Goldie ring R とし、partial skew polynomial ring $R[x; \alpha]$ の代数的構造の研究が期待される。

特に、 $R[x; \alpha]$ の prime ideals の分類、prime radical の決定、prime ideal で localization 可能である必要且つ十分条件を見つけること等は、興味ある未解決の問題である。

(2) V を skew field K の total valuation ring, σ を V の automorphism, δ を left σ -derivation とする。

Non-commutative generalized Bezout orders を one-sided ideals を用いて定義し、Ore extension $V[x; \sigma, \delta]$ は常に generalized Bezout order であることを示した。

この結果は non-commutative generalized Bezout order の初めての例であり、generalized Bezout orders の研究の先駆け

になると信じている。

更に、 $V[x; \sigma, \delta]$ が fully bounded になる必要且つ十分条件は下記の4つの条件が満たされることであることを示した。

(a) V is (σ, δ) -fully bounded.

(b) $M_n(K)$, the (n, n) matrix ring over K , is algebraic over the center of K for all natural number n .

(c) σ is of finite order.

(d) δ is algebraic over K .

Ore extension が fully bounded になることを研究したのは世界で初めてである。

(3) skew field K の total valuation ring を V , G を ordered group, P を G の cone とする。更に $D = Q(K * G)$ を crossed product algebra $K * G$ の商環とする。

研究の目的は

“ D の中の total valuation rings R をすべて見つけ、それらを分類し、代数的構造を調べることである”。

この問題は非常に難しい問題である。

そこで、Gauss extensions という概念を導入し、まず Gauss extensions の分類、及びそれらの代数的構造を研究した (H. Brungs, H. Marubayashi and E. Osmanagic, Gauss extensions and total subrings for crossed product algebras, J. Algebra, 2007) (注意: Gauss extensions は total valuation rings の中で重要で中心的役割を果たしていることが知られている。).

主な成果は下記の通り:

① R の over-rings 及び R の sub-rings で Gauss extensions になっているものを完全に分類することができた。

② 自然な条件の下で、Standard Gauss extension という概念を導入し、Standard Gauss extensions の場合、prime ideals の構造を、 V の prime ideals と cone P の over-cones を用いて完全に分類することができた。

③ 興味ある多くの例を発見することができた。

④ $G = \mathbb{Z}$, the ring of integers, の場合、Gauss extensions は7つのタイプに分類することができた (H. Marubayashi and G. Xie, A classification of graded extensions in a skew Laurent polynomial ring, II, J. Math. Soc. Japan, 2008, 2009). これらの分類を基にして、

④ Gauss extensions の residue skew field

の構造を決定することができた。

⑤ Gauss extensions の代数的構造を研究するためより詳細な分類を得ることができた。

ここで得られた結果は、及び手法は $G = Q$, 有理数体、 $G = R$, 実数体の場合の Gauss extensions 分類に利用されることが期待される。

(4) Commutative Prufer rings の localizing systems を prime ideals を用いて分類することができた。

この結果は non-commutative Prufer rings, 及び semi-hereditary rings の localizing systems の分類可能性を示唆している。

(5) D commutative Dedekind domain, K をその商体、 σ を D の自己同型、 δ を left σ -derivation とする. skew polynomial ring $R = D[x; \sigma, \delta]$ の代数的構造の研究を行った. 主な結果は下記の通り :

① R の classical Krull dimension は 2 で、素イデアルは極大イデアル、又は極小素イデアルのどちらかである. 素イデアルが極大イデアル M の場合、prime factor ring R/M は常に simple Artinian ring になることを示した。

② P が極小素イデアルの場合、 $P = p[x; \sigma]$ (p は σ -prime ideal of D) 又は $P = P' \cap R$ (P' は $K[x; \sigma]$ の素イデアル) のいずれかであることを示した。

③ (a) $P = p[x; \sigma]$ の場合、prime factor ring $R/P = D/p[x; \sigma]$ となり、 R/P は常に hereditary ring となる. 更に、 R/P が Dedekind ring になるための必要且つ条件は p が D の素イデアルである。

(b) $P = P' \cap R$ (P' は $K[x; \sigma]$ の素イデアル) の場合。

まず、 $P = xR$ のとき、 $R/P = D$ となり、 R/P は Dedekind ring となる. $P \neq xR$ となる P が存在するとき、 R/P の center は $D_0[x^n]$ となる. ここで n は σ の位数で、 D_0 は D の center の元で σ 不変である全体の部分環である. この center の性質を用いて、“ R/P が hereditary ring になる必要かつ十分は P が M^2 に含まれないことである”ことを示した、ここで M はすべての極大イデアルを亘る。

尚、③の結果は Arimendariz の conjecture の肯定的解答にもなっている。

上記の結果の素イデアルの分類、及び prime factor ring の構造の分類の例を得るため gauss integers を用いた。

④ D を Gauss integers, σ を $\sigma(a + bi) =$

$(a - bi)$ で与えられた D の自己同型とする。

更に、 $R = D[x; \sigma]$ とし、 R の極小素イデアルとして $P = (x^2 + p)$ (p は素数) を考えた。

(a) $p = 2$ のとき、prime factor ring R/P は hereditary ring でない。

(b) $p = 4n + 3$ のとき、 R/P は hereditary ring でない。

(c) $p = 4n + 1$ の時、 R/P は hereditary ring であるが、Dedekind ring でない。

(d) $p = 4n + 1$ の場合、 $S = \{2^n, n = 1, 2, \dots\}$ による局所化を行うと、 R_S/P_S は Dedekind ring になる。

(6) D を commutative Noetherian integral domain、 σ を D の自己同型、 δ を left σ -derivation とする. Goodearl は Ore extension $D[x; \sigma, \delta]$ の素イデアル P には次の 2 のタイプがあることを示した。

(i) $p = P \cap D$ is a (σ, δ) -prime ideal of D .

(ii) $p = P \cap D$ is a prime ideal of D with $\sigma(p) \neq p$.

(ii) の場合、 P は極小素イデアルでないことを証明した。

この結果を用いて、 D が Noetherian completely integrally closed domain の場合、 $D[x; \sigma, \delta]$ の v -ideal の構造を完全に決定することができた。

特に、 $D[x; \sigma, \delta]$ の prime v -ideals P はつぎの 2 つのタイプしかないことを示した。

(a) $P = p[x; \sigma, \delta]$, where p is a (σ, δ) -prime ideal of D .

(b) $P = P' \cap D[x; \sigma, \delta]$, where P' is a prime ideal of $K[x; \sigma, \delta]$, where K is the quotient field of D .

この結果は、将来、non-commutative ring 上の Ore extension のイデアル論の研究に適用できる可能性を示唆している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

① H.Brungs, H. Marubayashi and E. Osmangic, Prime ideals in graded extensions for crossed product algebras, to appear in Comm. in algebras, 査読有、

② A.K.Amir, H. Marubayashi and Y.Wang, Prime factor rings of skew polynomial rings over a commutative Dedekind domain, to appear in Rocky Mountain J. of Math, 査読有、

③ H.Marubayashi, Ore extensions over total valuation rings, Algebras and

Representation Theory, 査読有、13, 2010,
④ W.Cortes, M.Ferrero, H.Marubayashi
and Y.Hirano, Partial skew polynomial
rings over semisimple Artinian rings,
Comm. in Algebras, 査読有、38,
2010,1663-1676、

⑤ H.Marubayashi and Y.Wang, The group
of divisors of an Ore extension over a
Noetherian integrally closed domain, The
Aligarh Bulletin of Math. 査読有 29(2),
2010,1-4.

〔学会発表〕(計 1 件)

①H. Marubayashi, Prime factor rings of
Ore extensions over a commutative Dedekind
domain, International Conference on
Algebra and its Applications(ICA-10),
Aligarh Muslim University, India (招待講
演)

〔図書〕(計 1 件)

①H. Marubayashi and F. Van Oystaeyen,
Springer, Prime Divisors and
Non-commutative Valuation Rings,2012,
査読有、218

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者 丸林 英俊
(徳島文理大学)

研究者番号：00034702

(2)研究分担者 植田 玲
(島根大学)

研究者番号：70213345

(3)連携研究者
()

研究者番号：