

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月9日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540057

研究課題名（和文） 特異チャーン類理論と数え上げ幾何の研究

研究課題名（英文） Singular Chern Class and Enumerative Geometry

研究代表者

大本 亨 (OHMOTO TORU)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号 20264400

研究成果の概要（和文）：

研究代表者の同変特異チャーン類に関する先行研究を、2種類の方向で整備・発展させた。第1に、準射影的ドリーニューマンフォード・スタックと固有な表現可能射の圏に関してチャーン・マクファーソン自然変換（特異チャーン類）を整備し、さらに同様な手法によタックの圏に対する特異Todd類変換およびヒルツェブルフ類変換の拡張を与えた。第2に、代数多様体上の n 点ヒルベルト・スキームについて、その特異チャーン類およびヒルツェブルフ類の生成母関数を検討した。最後に、微分トポロジーにおける“数え上げ幾何”の一種とも言える可微分写像のヴァシリエフ不変量と相対トム多項式に関して考察した。

研究成果の概要（英文）：

In this grant project, I developed in two directions my previous researches on the theory of equivariant singular Chern class. The first one is to establish a foundation of the Chern-MacPherson natural transformation for the category of quasi-projective Deligne-Mumford algebraic stacks (orbifolds) with proper representable morphisms. Furthermore, by the same mean, I gave an extension, for DM stacks mentioned above, of the Todd class transformation in the sense of Baum-Fulton-MacPherson and also the Hirzebruch class transformation in the sense of Brasselet-Schurmann-Yokura. The second one is that I tried to study the generating functions of singular Chern class of the Hilbert scheme of points on a smooth variety through the pushforward to the symmetric product. arguments. Finally, as a variant of enumerative geometry of singularities arising in differential topology, I studied about Vassiliev-type invariants and relative Thom polynomials for differentiable maps between smooth manifolds.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点論，特性類，特異チャーン類，トム多項式

1. 研究開始当初の背景

複素多様体のチャーン類とは、その接束のチャーン類のことである。これを、特異点を許容する代数多様体(特異多様体)に対して拡張したものを総称して「特異チャーン類」と呼ぶ。この不変量は特異多様体のある種の特異性を反映している不変量である。さて、特異チャーン類には種々の異種が数多く存在するが、そのなかでもとくに、共変的自然変換として定式化されているチャーン・マクファーソン自然変換が有用である。これは、構成的関数を“可測関数”と見なしたオイラー標数を測度とする積分論のホモロジー値版である。

研究代表者は、この拡張として、代数幾何的ボレル構成を用いて同変チャーン・マクファーソン変換を与えていた。さらに「オビフォルド構成的関数」を導入してオビフォルド・チャーン類を定義し、対称積に適用することで種々の公式を求めていた。この応用として、とくに、準射影曲面(複素2次元)の n 点ヒルベルト・スキームのチャーン類を対称積に写像した像に関する母関数公式が得られる。これは、数理物理でもよく知られるところのヒルベルト・スキームのオイラー標数の母関数公式(グッチュの公式)を、チャーン類版に自然に拡張したものである。

また、研究代表者は、微分トポロジーにおける「数え上げ幾何」の一種とも言える可微分写像の特異点のトム多項式およびヴァシリエフ不変量の研究を行っていた。一見、先のチャーン類の研究とは関連がなさそうに見えるが、ある種の分類スタックの特性類理論を開発する、という意味において、手法的に類似している。

2. 研究の目的

層やベクトル束のコホモロジー特性類理論(反変的自然変換)はよく知られるところであって、代数的トポロジーおよび代数幾何において基礎理論ができています。特に代数多様体や写像の特異点の数え上げ理論において、リーマン・ロッホの定理などの積分操作が代数幾何学において重用されてきた(たとえば、マンフォードらによる複素曲線のモジュライ空間上の交叉理論など)。しかし、一般の特異性を許す特異多様体を扱う場合には、いろいろな技術的困難が伴う。そこで、一般の特異性を許す代数多様体あるいはスタックに対するホモロジー特性類理論(共変的自然変換)の基礎理論を構築し、数え上げ理論への応用を前進させたい。これが本研究の主目的である。この方向は、代数幾何では、一部の専門家を除いてほとんど開拓されていなかった独自の方向性である。

すなわち本研究では、代数多様体の加法的特性類自然変換の一般論の整備を行い、特異点の数え上げ理論への応用に向けた基盤を固めることを目指す。具体的には、(1) 種々のモジュライ空間に関する特性類の研究を進めるために、特性類自然変換を代数的スタックに拡張すること、(2) 対称積のある種の特異点解消(点配置空間のフルトン・マクファーソンによるコンパクト化やヒルベルト・スキーム)の特性類について母関数表示を検討すること、(3) 可微分スタックの特性類理論という観点から、微分トポロジーにおける写像の特異点の数え上げ理論(一般化されたトム多項式の理論)を整備・発展すること、である。

3. 研究の方法

上記 (1) については、この10年程の間にジョイスやクレッシュラにより代数的スタック上の構成的関数やチャウ群の理論が整備されてきている。そこでそれらの理論を用いて、代表者の先行研究である同変チャーン類理論を拡張する。さらに同様な手法を用いて、モチヴィク不変量の文脈から、ブラスレ・シュアマン・與倉のヒルツェブルフ特性類自然変換に関して、その DM スタック版を考察する。

(2)については、対称積の特異チャーン類の母関数理論(代表者の先行研究)を基本に、3次元以上の代数多様体上の点のヒルベルト・スキームに関して特異チャーン類を扱う。

(3)については、写像空間のストラティフィケーション理論とそのコホモロジー論を、マザーの講演ノート(1976)を元にして整備することから始める。

科研費の主要な支出用途は、国内外の専門家集団との研究連絡などのための出張経費である。その具体的な活動に関して以下で説明する。まず 2009 年度は、第5回日仏特異点シンポジウム(ストラスブール, フランス)にそのオーガナイザーの一人として出席し、トム多項式理論に関して講演し、多くの専門家との研究連絡を取った。つづいてミュンスター大におけるサテライトシンポジウムに参加し、J. シュアマン氏らと曲面のヒルベルト・スキームの特性類の母関数表示に関して議論した。これは、その後の展開(後述)に良い形で繋がった。2010 年度は、特異点論における大規模で著名な国際研究集会 Real and Complex Singularities (サンカルロス, ブラジル)にて可微分写像のヴァシリエフ不変量に関する成果を発表し、V. ゴリュエノフらの関連研究者と研究連絡を行った。2011 年度では、第6回日仏特異点シンポジウム(福岡)にオーガナイザーの一人として参画し、特異点解消の専門家との議論のため、招聘旅費等に科研費を用いた。

4. 研究成果

(1) 準射影的ドリーニュ・マンフォード(DM)スタックと固有な表現可能射に対して、チャーン・マクファーソン自然変換理論を定式化した。これは、ジョイスの意味のスタック上の構成的関数に対する特性類変換である。さらに、同様な手法により、特異トッド類変換およびヒルツェブルフ類自然変換もこの DM スタックに対して拡張した。これらの自然変換は、今後、トーリック幾何や種々のモジュライ空間の幾何に対していろいろと応用が見込まれ、有望であると考えられる。

(2) 一般次元の代数多様体上の n 点ヒルベルト・スキームについて、その特異チャーン類を対称積に写像した像に関する生成母関数を検討した。特に、 $n=3$ の場合、特異チャーン類に関するマクマホン型の無限オイラー積表示が現れる。さらに、ベーレントの構成的関数に対するチャーン類(の対称積に写像した像)の生成母関数も得られる。この公式の0次部分の指数は、ヒルベルト・スキームの仮想モチーフに関するドナルドソン・トーマス型不変量である。すなわち、この不変量のチャーン類版を与えたことに相当する。さらに、L. マキシム, J. シュアマン, 與倉昭治氏らとの共同研究として、チャーン類だけでなく、より一般にヒルツェブルフ類の生成母関数表示に関して検討を始めた。

(3) 実多様体のカテゴリーにおける写像の特異点の分類理論は、トム・ポントリャーギン・シューチ構成を通して、可微分スタックを与える。特異点型に対応する部分スタック(特異点軌道)の仮想基本類がトム多項式に他ならない。ここでは、構造安定写像のナイーブな意味での高次ヴァシリエフ不変量に関して研究した。とくに値域多様体の次元が定義域多様体の次元よりも2以上大きい場合、高次ヴァシリエフ不変量は次数1不変量の多項式となることを示した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計5件)

- ①. T. Ohmoto, “Vassiliev type invariants revisited”, to appear in Contemporary Math, AMS, Proc. 10th International Workshop on Real and Complex Singularities 2010, Sao Carlos(査読有)
- ②. T. Ohmoto, A note on Chern-Schwartz - MacPherson class, to appear in Proceedings of the 5th Franco - Japanese symposium on Singularities (Aug. 2009, Strasbourg, France), IRMA lecture note series, Univ. Strasbourg (査読有)
- ③. T. Ohmoto, Thom polynomial associated to the Milnor number of ICIS, Workshop - Geometry of Singularities and Manifold, Yamagata 2010 報告集(2011) (査読無)
- ④. T. Ohmoto, Thom polynomials and around, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B11, New Trends in Combinatorial Representation Theory eds. S. Ariki and M. Okado, (2009), 75-86 (査読有)
- ⑤. 大本 亨, 特異点の教え上げと同変 Chern 類, 数学 61 巻 (2009), 21-39 (査読有)

[学会発表] (計13件)

- ① T. Ohmoto, 2012年2月15日, 7th Algebra-Analysis-Geometry Seminar, 鹿児島大学, “Singular Chern class and Degree formula”
- ② T. Ohmoto, 2011年5月21日, Banach Center Conference, Workshop on Singularities in Geometry and Application, Bedlewo (Poland), “Thom polynomial associated to the Milnor number of ICSC”
- ③ T. Ohmoto, 2011年1月6日, JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects: Topology of singularities and related topics, II, 東北大学大学院理学研究科数学教室川井ホール”Chern class for singular spaces”
- ④ T. Ohmoto, 2010年12月17日, JSPS - RFBR 日露二国間交流事業共同研究プロジェクト「可積分系、ランダム行列、代数幾何と幾何学的不変量」研究集会, 京都大学吉田南キャンパス”Chern class for singular spaces”
- ⑤ T. Ohmoto, 2010年9月16日, Workshop - Geometry of Singularities and Manifold, 山形大学理学部 “Thom polynomial associated to the Milnor number of ICIS”
- ⑥ T. Ohmoto, 2010年7月27日, The 11th International Workshop “Real and Complex

Singularities”, ICMC-USP Sao Carlos, Brazil, “Vassiliev type invariants revisited”

- ⑦ T. Ohmoto, 2010年7月21日, 研究集会「可微分写像の特異点」, 日大文理学部 “Singularities and Characteristic Classes for Differentiable Maps”
- ⑧ T. Ohmoto, 2010年 3月13日, JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects: Mini-workshop “Geometry of singularities and related “Chern class for singular spaces”
- ⑨ T. Ohmoto, 2009年12月15日, 幾何学セミナー, 東北大学理学部数学教室 “Vassiliev-type invariants revisited”
- ⑩ T. Ohmoto, 2009年12月14日, 東北大学理学部数学教室・談話会 “特異多様体の特性類”
- ⑪ T. Ohmoto, 2009年12月8日, 研究集会「特異点と多様体の幾何」日大文理学部 “Vassiliev 不変量再考”
- ⑫ T. Ohmoto, 2009年8月31日 International Workshop: Geometry of Singularities, Dept. Math., Univ. Munster, “Some formulae of Chern classes of Symmetric products and Hilbert schemes”
- ⑬ T. Ohmoto, 2009年 8月28日, The 5th France-Japanese Symposium on Singularities (IRMA, Strasbourg, France) “Equivariant singular Chern classes and some applications”

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大本 亨 (OHMOTO TORU)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号 20264400

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし