

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540059

研究課題名(和文)部分多様体にあらわれる統計構造の幾何学

研究課題名(英文)Geometry of statistical structures and the submanifold theory

研究代表者

古畑 仁 (FURUHATA, Hitoshi)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：80282036

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：統計多様体は、情報幾何学、アファイン微分幾何学、ヘッセ幾何学とよばれる諸分野と深い関係がある。本研究では、ヘッセ断面曲率一定空間の分類問題およびヘッセ断面曲率一定空間の間の余次元1の統計はめ込みの分類問題を通して、統計多様体の微分幾何学的な性質、とくに統計多様体の性質の部分多様体論的な側面を明らかにした。また、複素空間形内の実リーマン部分多様体論の研究を進展させ、統計部分多様体に対する複素幾何学の構築の準備を行った。

研究成果の概要(英文)：Geometry of statistical manifolds are deeply related to various research fields, for example, information geometry, affine differential geometry, and Hessian geometry. In this project, we researched the submanifold theoretical aspects of statistical manifolds, in particular, we studied construction and classification problems for Hessian manifolds of constant Hessian sectional curvature, and for statistical hypersurfaces between such spaces. Furthermore, through the study of Riemannian submanifolds in complex space forms, we prepared to build complex geometry for statistical manifolds.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：統計多様体 ヘッセ多様体 ヘッセ断面曲率 複素空間形 部分多様体 アファイン微分幾何学

1. 研究開始当初の背景

確率分布族のなす空間に幾何学的な視点が導入されたことは統計的推論に大きな発展をもたらしたが、これは情報幾何学とよばれる分野の建設へとつながった。そこでは、ある種のアフィン接続とリーマン計量の組が中心的な役割を果たしたが、それを抽象化したものが統計構造にはかならない。統計構造を備えた多様体は統計多様体とよばれる。

ある種の統計構造は、この流れとは独立に、さまざまな分野に現れることが報告されるようになっていた。とくにアフィン微分幾何学やヘッセ幾何学とよばれる分野等と深い関係があることがわかり、これらを統計多様体の幾何学として総合的に研究することが課題となっていた。

2. 研究の目的

このような状況を鑑み本研究の目的は、統計多様体の微分幾何学的な性質を統一的に明らかにすること、とくに、統計多様体の部分多様体論的な側面を明らかにすることにあった。

3. 研究の方法

上記の目的のために下の(1)から(4)の問題を研究分担者および連携研究者と協力して遂行することとした。年に1回ワークショップを開催し、相互の情報交換をすると同時に、関係する諸分野の専門家との交流、若手研究者の育成を図ることとした。

(1) 統計多様体論としての定曲率空間の分類と構成

(2) 定曲率空間内の統計部分多様体論の構築

(3) 複素統計多様体およびその中の部分多様体論の展開

(4) 統計構造の拡張と新しいクラスの部分多様体論の発見

4. 研究成果

本研究で得られた主な成果を上記方法の番号に対応して記すことにする。

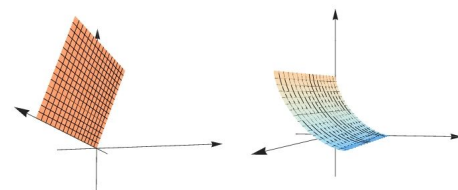
(1) コダッチ方程式をみたま、ねじれのないアフィン接続とリーマン計量の組をもつ多様体を統計多様体という。とくにアフィン接続が平坦なとき統計多様体をヘッセ多様体とよぶ。ヘッセ断面曲率一定のヘッセ多様体を「統計多様体の幾何学」の空間形(モ

デル空間)と考える。この空間のリーマン計量は断面曲率が一定であることが知られている。単連結ヘッセ多様体でヘッセ断面曲率が0のものを分類した。とくに接続が完備なものを決定し、この空間を特徴づけた。単連結ヘッセ多様体でヘッセ断面曲率が負で一定のものを分類した。とくに接続が完備なものを決定し、この空間を特徴づけた(5.論文[3]参照)。

なお、ヘッセ断面曲率が正で一定のヘッセ多様体の分類問題は完全な解答が得られていない。2次元の場合には、正規分布全体のなす空間から構成される統計多様体はこのような空間の例であり、今後の重要な課題である。

(2) ((1)の意味で)ヘッセ断面曲率0をもつ空間形は、正の実数全体からなる集合の直積というモデルをもつ。その原点を中心とする超球面は、ヘッセ断面曲率が負のヘッセ多様体になり、さらに強い意味でのヘッセ・アインシュタイン的であることがわかる。3次元以上の場合には、逆にこの性質で原点を中心とする超球面を局所的に特徴づけられることがわかった。この超球面として実現される統計多様体は、有限個のサンプル空間上の正の確率密度関数全体のなす空間に自然に定まる統計構造(フィッシャー計量および指数型接続)を入れたものと理解でき、基本的であると同時に応用上重要な役割は果たすことが期待できる(5.論文[5]参照)。

統計多様体間の写像が統計はめ込みであるとはその統計構造を保存するものをさす。ヘッセ断面曲率0をもつ2次元空間形からヘッセ断面曲率0をもつ3次元空間形への統計はめ込みについて、統計的第2基本形式が消えるものを決定した。さらに、これらの空間間の柱状的な統計はめ込みについて、生成曲線のみたすべき常微分方程式を導出し、それを決定した(5.論文[2]参照)。



(図は柱状的な統計はめ込みの例)

(3) 複素次元が3以上の複素射影空間の実超曲面は、もし一般化された田中・ウェブスター接続のリッチ・テンソル場が消えるならば、局所的に測地超球面であることを示した。さらに、この接続に関する平行実超曲面の分類を行った(5.論文[7]参照)。

これらは複素空間形内のリーマン部分多様体論についての成果で、これらの成果およびそれを得るために開発された技法を複素統計多様体としての空間形内の部分多様体論へ進展させることは今後の課題として残

っている .

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 23 件)

[1] Fujioka A., Furuhata H. and Sasaki T., Projective minimality for centroaffine minimal surfaces, J. Geom. 105(2014), 87-102, doi:10.1007/s00022-013-0196-9, 査読有

[2] Furuhata H., Hu N. and Vrancken, L., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero II, J. Van der Veken, I. Van de Woestyne, L. Verstraelen, L. Vrancken (eds.) Pure and Applied Differential Geometry - PADGE 2012 In Memory of Franki Dillen, Shaker Verlag GmbH, Germany, ISBN-13: 978-3844023633, (2013), 136-142, 査読無

[3] Furuhata H. and Kurose T., Hessian manifolds of nonpositive constant Hessian sectional curvature, Tohoku Math. J. 65(2013), 31-42, doi:10.2748/tmj/1365452623, 査読有

[4] Kon M., Pseudo-parallel CR submanifolds of a complex space form, Tsukuba J. Math. 36 (2012), 99-110, 査読有

[5] Furuhata H., Statistical hypersurfaces in the space of Hessian curvature zero, Differential Geom. Appl. 29(2011), S86-S90, doi:10.1016/j.difgeo.2011.04.012, 査読有

[6] Kon M., Semi-parallel CR submanifolds in a complex space form, Colloquium Math. 124 (2011), 237-246, 査読有

[7] Cho J.T. and Kon M., The Tanaka-Webster connection and real hypersurfaces in a complex space form, Kodai Math. J. 34(2011), 474-484, 査読有

[8] Kon M., On 3-dimensional compact real hypersurfaces of a complex space form, The Fifteenth International Workshop on Differential Geometry and Related Fields 15(2011), 47-56, 査読無

[9] Kon M., Compact minimal CR submanifolds of a complex projective space

with positive Ricci curvature, Tokyo J. Math. 33(2010), 415-434, 査読有

[10] Kon M., A minimal real hypersurface of a complex projective space with non-negative sectional curvature, Bull. Austr. Math. Soc. 81(2010), 488-492, 査読有

[11] Kon M. and Kon M., The scalar curvature of minimal submanifolds in a complex projective space, Bull.Fac.Educ.Hirosaki Univ. 103(2010), 45-52, 査読無

[12] Furuhata H., Hypersurfaces in statistical manifolds, Differential Geom. Appl. 27(2009), 420-429, doi:10.1016/j.difgeo.2008.10.019, 査読有

[学会発表] (計 28 件)

[1] 松添博, 確率分布の規格化と統計多様体の射影構造, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (5), 2014年1月11日, 北海道大学(札幌市).

[2] 古畑仁, ヘッセ多様体とアファイン球面, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (5), 2014年1月10日, 北海道大学(札幌市).

[3] 長谷川和泉, 接バンドル上の正則統計構造, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (5), 2014年1月10日, 北海道大学(札幌市).

[4] 古畑仁, 中心アファイン極小曲面の射影極小性, 福岡大学微分幾何学研究集会, 2013年11月2日(福岡市).

[5] 黒瀬俊, Equiaffine plane curves from the viewpoint of billiards, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (4), 2013年3月2日, 北海道大学(札幌市).

[6] 松添博, 一般化指数型分布族と双対平坦構造, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (4), 2013年3月2日, 北海道大学(札幌市).

[7] 古畑仁, 接続の幾何学における部分多様体論にむけて, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (4), 2013年3月2日, 北海道大学(札幌市).

[8] FURUHATA Hitoshi, Statistical

immersions of spaces of constant Hessian curvature, The 8th HU and SNU Symposium on Mathematics -Recent developments of Geometry and Topology-, 2012年12月7日, 北海道大学(札幌市).

[9] FURUHATA Hitoshi, Geometry of statistical submanifolds, PADGE2012, 2012年8月29日, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.

[10] FURUHATA Hitoshi, Submanifold theory for statistical manifolds, Workshop on Differential Geometry, 2012年6月8日, Northeastern University, Shenyang, China.

[11] 昆万佑子, 複素空間形の擬平行なCR部分多様体について, 統計多様体の幾何学とその周辺(3), 2011年12月2日, 北海道大学(札幌市).

[12] 黒瀬俊, アフィン微分幾何と統計多様体, 統計多様体の幾何学とその周辺(3), 2011年12月2日, 北海道大学(札幌市).

[13] 松添博, プレコントラスト関数の幾何学, 統計多様体の幾何学とその周辺(3), 2011年12月2日, 北海道大学(札幌市).

[14] 昆万佑子, 複素空間形の実部分多様体について, 第5回札幌・福岡幾何学セミナー, 2011年11月21日-22日, 北海道大学(札幌市).

[15] KON Mayuko, On 3-dimensional compact real hypersurfaces of a complex space form, The 15th International Workshop on Differential Geometry, 2011年11月4日, Kyungpook National University, Korea.

[16] FURUHATA Hitoshi, A realization problem for statistical manifolds, 福岡大学微分幾何学研究集会, 2011年11月3日(福岡市).

[17] FURUHATA Hitoshi, Statistical Immersions, RIKEN Workshop on Information Geometry, 2011年8月31日, 理化学研究所脳科学総合研究センター(和光市).

[18] 古畑仁, 定曲率 Hesse 多様体のモデルについて, 研究集会「擬リーマン幾何学の展開 III」, 2010年12月19日, お茶の水女子大学(東京都).

[19] 古畑仁, Statistical manifolds --- Hypersurfaces and complex structures, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺(2), 2010年10月29日,

北海道大学(札幌市).

[20] 松添博, プレ・コントラスト関数と非正則統計モデルの幾何学, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺(2), 2010年10月29日, 北海道大学(札幌市).

[21] 長谷川 和泉, Remarks on conformal-projective flatness of tangent bundles with some lift statistical structures, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺(2), 2010年10月29日, 北海道大学(札幌市).

[22] FURUHATA Hitoshi, Statistical submanifolds and spaces of constant Hessian sectional curvature, Differential Geometry and its Applications, 2010年8月28日, Masaryk University, Brno, Czech Republic

[23] 古畑仁, Centroaffine Surfaces with Special Center, 松江微分幾何学研究会2009, 2009年12月11日, 島根大学(松江市).

[24] 古畑仁, Spaces of non-positive constant Hessian curvature, 福岡大学微分幾何学研究集会, 2009年11月20日(福岡市).

[25] 松添博, Two dimensional α -Hessian manifolds, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺(1), 2009年11月6日, 北海道大学(札幌市).

[26] 古畑仁, Examples of Statistical Manifolds, ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺(1), 2009年11月6日, 北海道大学(札幌市).

[27] 昆万佑子, Real hypersurfaces in complex space forms and the generalized Tanaka-Webster connection, The 13th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields, 2009年11月6日, Kyungpook National University, 大邱広域市, 韓国

[28] 昆万佑子, On the Ricci tensor and the generalized Tanaka-Webster connection of real hypersurfaces in a complex space form, The 44-th Symposium on Finsler Geometry, 2009年9月9日, 東海大学(札幌市)

{図書}(計 1 件)

[1] 古畑仁, 数学書房, 曲面, 2013年,
245頁

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~furu-hata/workshop/stat/13/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古畑 仁 (FURUHATA Hitoshi)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 80282036

(2) 研究分担者

昆 万佑子 (KON Mayuko)
信州大学・教育学部・准教授
研究者番号: 70507186

(3) 連携研究者

松添 博 (MATSUZOE Hiroshi)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 90315177

黒瀬 俊 (KUROSE Takashi)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 30215107

長谷川 和泉 (HASEGAWA Izumi)
北海道教育大学・教育学部・名誉教授
研究者番号: 50002473