

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月27日現在

機関番号：12102  
 研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2009～2011  
 課題番号：21540063  
 研究課題名（和文） 等質空間の微分幾何学・積分幾何学とその応用  
 研究課題名（英文） Differential geometry and integral geometry in homogeneous spaces and its applications

## 研究代表者

田崎 博之（TASAKI HIROYUKI）  
 筑波大学・数理物質系・准教授  
 研究者番号：30179684

研究成果の概要（和文）：コンパクト型 Hermite 対称空間内の二つの実形の交叉が対蹠集合になることを田中真紀子氏との共同研究で証明し、Chen-Nagano の極地の理論を利用して実形の交叉を詳細に調べた。これを利用して二つの実形に関する Floer ホモロジーを決定し、Arnold-Givental 不等式の拡張を入江博氏、酒井高司氏との共同研究で得た。さらにこれらと交叉積分公式を応用して 実形の Hamilton 変形の体積の下からの評価を得た。

研究成果の概要（英文）：We proved that the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type is an antipodal set in a joint work with Makiko Tanaka and investigated their intersection by the use of the theory of polars introduced by Chen-Nagano. Using this result we determined the Floer homology of two real forms and extended Arnold-Givental inequalities in a joint work with Hiroshi Iriyeh and Takashi Sakai. Moreover we used these results and a kinematic formula to obtain an estimate of the volume of Hamiltonian deformation of a real form from below.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学、積分幾何学、等質空間、部分多様体、Hermite 対称空間、実形、対蹠集合

## 1. 研究開始当初の背景

科学研究費基盤(C)「等質空間の積分幾何学とその応用」(2006年度～2007年度)およびその後行った研究から、Lie 群の軌道の微分幾何学的考察が積分幾何学の交叉積分公式の定式化とその応用において重要であるという認識を得て、本研究に着手した。

## 2. 研究の目的

(1) Lie 群の軌道の微分幾何学的性質を研究する。鏡映部分多様体、弱鏡映部分多様体、austere 部分多様体、極小部分多様体になる Lie 群の軌道の特徴付け、分類を明らかにする。さらに Gauss 写像の退化する部分多様体と上記部分多様体との間の関係を明らかに

する。

(2) 部分多様体の幾何学的量を等長変換群の作用や部分多様体の族による切断を使って表現する交叉積分公式の具体的な定式化を、研究目的(1)の成果、Lie 群の表現論、幾何学的付値理論や特殊関数の理論を利用して与える。さらに得られた交叉積分公式を幾何学的量に関する変分問題に応用する。

(3) 積分によって定まる幾何学的量を扱う準備として、積分の有限近似和の収束の速さを明らかにする。

### 3. 研究の方法

(1) Riemann 対称対に対して定まる Euclid 空間内の軌道を対称対の制限ルート系を利用して調べる。軌道の微分幾何学的性質と Lie 環やルート系の代数的性質を結び付け、幾何学的問題を代数的問題に帰着させる。

(2) 位相幾何学的、シンプレクティック幾何学的手法によって部分多様体の交点数の下からの評価を導き、それを交叉積分公式に適用することで部分多様体の体積等の幾何学的不変量の評価を行う。

(3) Gleason の示した単体複体のホモロジーを利用した曲線の長さの近似和の手法と Chui の示した Riemann-Stieltjes を利用した積分の近似和の手法を使って、Riemann 積分のいくつかの近似和の収束の速さを調べる。

### 4. 研究成果

(1) 代表者が連携研究者井川治氏、酒井高司氏との共同研究で提起した弱鏡映部分多様体の基本的性質を調べ、球面内において austere 部分多様体との関連性を明らかにした。また、対称対のイソトロピー作用の軌道の Gauss 写像の退化性を Lie 環により特徴付けた。その結果、austere 部分多様体や Ferus の不等式の等号を成立させる部分多様体の系列を構成できた。これらの研究成果は論文⑦と⑤で発表した。

(2) 代表者は複素二次超曲面の二つの実形の交叉の構造を明らかにした。酒井によるコンパクト対称空間の最小軌跡の構造、竹内によるコンパクト対称空間の極大トーラスの性質の研究等を利用して、Chen-Nagano の導入した極地と実形の交叉の関係を記述することによって、実形の交叉を極地による帰納法で調べることができた。これにより二つの実形の交叉は Chen-Nagano の導入した対蹠集合になることが明らかになった。これらの結果は論文④で発表した。この論文はこの後の一連の研究の出発点になった。これに続き、田中真紀子氏と共同研究で一般のコンパクト型 Hermitte 対称空間内の二つの実形の交叉も対蹠集合になることを証明した。この証明にも酒井による最小軌跡の構造と竹内による極大トーラスの性質の研究が鍵になった。交叉が対蹠集合になることがわかれば、この場合も極地の理論を使って交叉をさらに詳

しく調べることが可能になった。実形の一つを合同なものに置き換えても交点数は変わらないこと、合同な二つの実形の交点数は実形の 2-number に等しいことなどを導くことができた。さらに既約コンパクト型 Hermitte 対称空間内の二つの実形の交点数を完全に決定した。この交点数の計算には実形の交叉と極地の関係が鍵になった。多くの既約コンパクト型 Hermitte 対称空間の二つの実形の交点数は実形の 2-number の小さい方に一致するが、ある種の複素 Grassmann 多様体の二つの実形の交点数はそれらの 2-number よりも小さいことが判明した。これは後で述べる Floer ホモロジーが二つの実形の位相不変量だけでは表現できないことを示唆しており興味深い。これらの研究結果は論文③で発表した。

コンパクト型 Hermitte 対称空間を含むより広いクラスである対称 R 空間の対蹠集合について研究を進めた。対称 R 空間をコンパクト Lie 群の随伴軌道で表現したときに対蹠集合を Lie 環の可換性によって記述できることを田中真紀子氏との共同研究で明らかにした。これによって対称 R 空間の対蹠集合は次の二つの性質を持つことがわかった。(a) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。(b) 二つの大対蹠集合は合同になる。対称 R 空間ではないコンパクト対称空間の対蹠集合についてはこれらの性質は一般には成り立たないことも判明した。これらの結果は論文②で発表した。

複素 Grassmann 多様体内の二つの実形の交叉を調べる際に利用した極地は次元の低い複素 Grassmann 多様体の積になり、特に既約ではない。そのため既約なものを調べる際にも次元の低い既約ではないものの実形の交叉に関する情報が必要になる。この準備のために論文②では既約ではないコンパクト型 Hermitte 対称空間の基本的な実形の交叉も扱った。これは既約ではない一般のコンパクト型 Hermitte 対称空間内の二つの実形の交叉を研究するための基礎になると思われる。

また、この論文では複素 Grassmann 多様体内のいくつかの実形の交叉を具体的に表示した。これはそれまでにわかっていた実形の交叉の具体的表示の一般化であるだけでなく、複素旗多様体内の実形の交叉の研究に進む際の指標になると思われる。

コンパクト型 Hermitte 対称空間の二つの実形の交叉は対蹠集合になるということから、二つの実形に関する Floer ホモロジーの境界作用素が消えることがわかり、この実形の対に対する Floer ホモロジーはこの実形の交叉で生成されることが入江博氏、酒井高司氏との共同研究でわかった。これによりコンパクト型 Hermitte 対称空間の二つの実形に関する Floer ホモロジーを具体的に記述できた。さ

らに、二つの実形に対して Arnold-Givental 不等式を拡張し交点数の下からの評価を得た。この Arnold-Givental 不等式の拡張を交叉積分公式の被積分関数に適用することである種の実形の Hamilton 変形の体積の下からの評価を得た。これらの結果は論文①で発表した。

(3) Riemann 積分の定義区間の分割による各種の近似和の収束の速さを Gleason の手法や Chui の手法を利用して調べた。これらの結果は論文⑥で発表した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 査読有 (掲載決定)
- ② M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. 査読有 (掲載決定)
- ③ M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan 査読有 (掲載決定)
- ④ H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J., 査読有 62 (2010), 375-382
- ⑤ O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Lie-algebraic characterization of tangentially degenerate orbits of s-representations, Differential Geom. Appl., 査読有 28 (2010), 81-101
- ⑥ H. Tasaki, Convergence rates of approximate sums of Riemann integrals, J. Approx. Theory 査読有 161 (2009), 477-490
- ⑦ O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds, J. Math. Soc. Japan 査読有 61 (2009), 437-481

[学会発表] (計 19 件)

- ① 酒井高司, Lagrangian Floer homology and its application to Hamiltonian volume minimizing property, The 4th TMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2012年3月18日、National Taiwan University, Taiwan
- ② 田崎博之, Volume estimates of Lagrangian submanifolds in complex hyperquadrics, 2011 International conference on Integral and Convex

Geometric Analysis and Related Topics, 2011年12月16日、Chern Institute of Mathematics, Nankai University, China

③ 酒井高司, 複素二次超曲面の実形の Hamilton 体積最小性について、部分多様体論・湯沢 2011 2011年11月25日、湯沢グランドホテル

④ 田崎博之, 対蹠集合とその応用、研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」2011年9月3日、東京理科大学森戸記念館

⑤ 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉、研究集会：有界対称領域の算術商のコホモロジーとモジュラー・サイクル 2011年8月4日、東京大学玉原国際セミナーハウス

⑥ 田中真紀子, 田崎博之, コンパクト対称空間の幾何学、秋葉原微分幾何セミナー 2010年12月4日、秋葉原ダイビル

⑦ 田崎博之, コンパクト対称空間の対蹠集合、幾何学阿蘇研究集会 2010年9月1日、休暇村南阿蘇

⑧ 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉、第57回幾何学シンポジウム 2010年8月8日、神戸大学

⑨ 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉、首都大学東京幾何学セミナー 2010年4月16日、首都大学東京

⑩ 田崎博之, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, Mini-Workshop: Valuations and Integral Geometry 2010年1月21日、Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany

⑪ 田崎博之, コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉、部分多様体論・湯沢 2009 2009年11月26日、湯沢グランドホテル

⑫ 田崎博之, 複素 Grassmann 多様体の二つの実形の交叉、広島大学幾何学研究集会 2009年10月7日、広島大学

⑬ 田崎博之, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」2009年9月7日、東京理科大学森戸記念館

[その他]

ホームページ等

<http://www.tsukuba.ac.jp/~tasaki/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田崎 博之 (TASAKI HIROYUKI)  
筑波大学・数理物質系・准教授  
研究者番号：30179684

### (2) 連携研究者

伊藤 光弘 (ITO MITSUHIRO)

筑波大学・名誉教授

研究者番号：40015912

井川 治 (IKAWA OSAMU)

福島工業高等専門学校・一般教科・教授

研究者番号：60249745

酒井 高司 (SAKAI TAKASHI)

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：30381445

(3) 研究協力者

田中 真紀子 (TANAKA MAKIKO)

東京理科大学・理工学部・准教授

研究者番号：20255623

入江 博 (IRIYEH HIROSHI)

東京電機大学・未来科学部・准教授

研究者番号：30385489