

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：12201

研究種目：基盤研究（C）（一般）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540066

研究課題名（和文） 3次元単位球面内の平坦トーラスに関する未解決問題の研究

研究課題名（英文） Studies on some open problems concerning flat tori in the unit 3-sphere

研究代表者

北川 義久（KITAGAWA YOSHIHISA）

宇都宮大学・教育学部・教授

研究者番号：20144917

研究成果の概要（和文）：3次元単位球面内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は円周率 $\pi$ に等しいであろうという「直径予想」について研究し、はめ込み写像の平均曲率が「非負または非正」ならば直径予想が正しいことを証明した。さらに、この結果を応用することにより、3次元単位球面内に等長的にはめ込まれたクリフォードトーラスは、もし平均曲率が「非負または非正」ならば標準的に埋め込まれたクリフォードトーラスと合同であることを証明した。

研究成果の概要（英文）：Diameter conjecture on flat tori in the unit 3-sphere states that the extrinsic diameter of isometrically immersed flat tori in the unit 3-sphere is equal to  $\pi$ . In this research, we proved the conjecture under the assumption that the mean curvature of the immersion is nonnegative or nonpositive. Using this result, we proved that if  $f$  is an isometric immersion of a Clifford torus into the unit 3-sphere whose mean curvature is nonnegative or nonpositive, then the immersion  $f$  is congruent to the standard embedding of the Clifford torus.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何

## 1. 研究開始当初の背景

（1）研究開始までの経緯．1975年，S. T. Yau [9] は「3次元単位球面  $S^3$  内の平坦トーラスを分類せよ」という問題を提起した． $S^3$  内の平坦トーラスとは， $S^3$  内には

め込まれた2次元トーラスであって  $S^3$  から誘導されるリーマン計量の曲率が0であるものをいう．当時，このようなトーラスの例として，Clifford トーラスや Hopf トーラスが知られていたが，これ以外の例があるかどうか

かは不明であった([8]). 研究代表者は, 1980年代後半,  $S^3$ の群構造およびHopf写像を用いて, 2次元単位球面 $S^2$ 上のある種の閉曲線対(periodic admissible pairとよばれる)から $S^3$ 内の平坦トーラスを構成する方法を開発し, この構成法を用いて,  $S^3$ 内の平坦トーラスの新しい例を構成した. さらに,  $S^3$ 内の平坦トーラスはすべてこの方法で構成できることを示し, Yauが提起した問題を解決した([3]).

これ以後, この構成法を応用した研究成果が数多く得られている. 例えば, 研究代表者は,  $S^3$ 内の結び目のArf不変量と上記の構成法を用いて, 次の定理を証明した.

定理1 ([4]).  $S^3$ 内に等長的に埋め込まれた平坦トーラスは $S^3$ の対蹠写像で不変である.

さらに, 研究代表者は榎本一之氏およびJ.L.Weiner氏との共同研究の結果, 定理1の応用として,  $S^3$ 内のCliffordトーラスの剛性に関する次の定理を証明した.

定理2 ([2]).  $M$ を $S^3$ 内のCliffordトーラスとし $f$ を $M$ から $S^3$ への等長埋め込みとすると,  $f$ は $M$ から $S^3$ への包含写像と合同である.

また, 研究代表者は,  $S^3$ 内の平坦トーラスの等長変形について研究し, 等長変形不可能な $S^3$ 内の平坦トーラスの分類定理を証明した([5, 6]).

以上のように, 上述の構成法の発見以降,  $S^3$ 内の平坦トーラスの研究はLie群論や結び目理論等との関係を深めながら着実に進展してきた. また, 定理1が発表された数年後, Dadok-Sha[1]により, 定理1の別証明が発表され, この分野は国外の研究者達からも注目を集めるようになった. なお,  $S^3$ 内の平坦トーラスに関するこれまでの研究成果については論説[7]にまとめられている.

(2) 研究開始当初の課題. 研究開始当初, 以下のような研究課題が残されていた.

課題A. 上記の定理2はCliffordトーラスの剛性に関する大きな研究成果であったが, 定理2における仮定「等長埋め込み」を, より弱い仮定「等長はめ込み」に置き換えることが可能かどうかという興味深い問題が未解決であった.

課題B. これまでに得られた $S^3$ 内の平坦トーラスに関する諸定理について, その高次元化の問題も, ほとんどが未解決であった. 理由は,  $n$ が3以上の場合,  $(2n-1)$ 次元単位

球面内の $n$ 次元平坦トーラスの完全な構成法が発見されていないからであり,  $(2n-1)$ 次元単位球面内の $n$ 次元平坦トーラスの構成法の研究も重要課題として残されていた.

(3) 参考文献.

[1]J.Dadok, J.Sha, On embedded flat surfaces in  $S^3$ , J. Geometric Analysis 7 (1997), 47-55.

[2]K.Enomoto, Y.Kitagawa, J.L.Weiner, A rigidity theorem for the Clifford tori in  $S^3$ , Proc. A. M. S. 124 (1996), 265-268.

[3]Y.Kitagawa, Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in  $S^3$ , J. Math. Soc. Japan, 40 (1988), 457-476.

[4]Y.Kitagawa, Embedded flat tori in the unit 3-sphere, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 275-296.

[5]Y.Kitagawa, Isometric deformations of flat tori in  $S^3$  with nonconstant mean curvature, Tohoku Math. J., 52 (2000), 283-298.

[6]Y.Kitagawa, Deformable flat tori in  $S^3$  with constant mean curvature, Osaka J. Math., 40(2003), 103-119.

[7]北川義久, 3次元球面内の平坦トーラス, 数学, 57巻2号(2005), 113-126.

[8]M.Spivak, Some left-over problems from classical differential geometry, Proc. Sympos. Pure Math., 27(1975), 245-252.

[9]S.T.Yau, Submanifolds with constant mean curvature II, Amer. J. Math., 97 (1975), 76-100.

## 2. 研究の目的

前述の課題を解決するため, 研究目的を以下のように設定した.

研究目的A. 課題Aは $S^3$ 内の平坦トーラスに関する直径予想「 $S^3$ 内に等長的にはめ込まれた平坦トーラスの外的直径は常に円周率 $\pi$ に等しい」と密接な関係がある. 実際, この予想が肯定的に解決できれば, 「等長はめ込み」という弱い仮定の下で定理2の結論が得られることが知られている. これを踏まえて, 直径予想の肯定的解決を目指すこととした.

研究目的B. 課題Bは $(n-1)$ 次元複素射影空間 $CP^{n-1}$ 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法と密接に関係している. 実際,  $CP^{n-1}$ 内のラグランジュ平坦トーラスのHopf写像による逆像は $(2n-1)$ 次元単位球面内の $n$ 次元平坦トーラスである. 本研究では, この事実に着目し, 課題Bを解決するための

準備として、 $CP^2$ 内のラグランジュ平坦トーラスの構成法の開発を目指すこととした。

### 3. 研究の方法

研究目的を達成するため、以下のような研究計画を立てた。

#### 研究計画 A

(A-1) 直径予想と  $S^2$  上の閉曲線対の 2 重接触問題の同値性を確認する。

(A-2) 閉曲線対の変形理論 (都合のよい変形が存在することを保証する) を作る。

(A-3) 上記の変形理論を用いて、2 重接触問題を簡単な場合に帰着させ、直径予想を解決する。

#### 研究計画 B

(B-1) 複素射影平面  $CP^2$  内のラグランジュ平坦曲面の構造方程式を確認する。

(B-2) 上記の偏微分方程式の解を構成する方法を確立する。

(B-3) 上記の解の二重周期性について研究し、 $CP^2$  内のラグランジュ平坦トーラスを構成する。

研究計画 A を遂行するには、shell と呼ばれる図形に関する理論が有効である。研究代表者は、この理論に精通している連携研究者 (梅原雅顕) と共同研究を実施した。また、研究計画 B を遂行するために、研究代表者は、複素射影空間に値を持つ写像の研究に精通している連携研究者 (相原義弘) と共同研究を実施した。

具体的には、各年度に数回、研究代表者と連携研究者によるセミナーを実施し、問題解決のための討論を行った。また、研究代表者は国内および国外で開催される微分幾何学関連の研究集会に参加し、他の研究機関に所属する幾何学者達との交流を深め、研究計画の遂行に必要な情報を収集した。さらに、年度後半に、研究代表者と連携研究者は研究打合せを行い、それまでに得られた情報を共有するとともに研究計画を推進するためのアイデアについて検討した。

### 4. 研究成果

(1) 直径予想が 2 重接触予想「2 次元単位球面上のある種の閉曲線対 (periodic admissible pair とよばれる) は第 2 種の 2 重接触を許容する」と同値であることを証明した。

(2) さらに、ある条件の下で 2 重接触予想を解決した。すなわち、periodic admissible pair の二つの測地曲率の積が  $-1$  より小さいという条件を満たせば 2 重接

触予想が正しいことを証明した。

(3) 上記の成果 (1) および (2) を応用し、平坦トーラスの平均曲率が定符号ならば直径予想が正しいことを証明した。さらに、直径予想に関するこれらの研究成果を応用することにより、3 次元単位球面内の Clifford トーラスの剛性に関する問題を部分的に解決した。すなわち、3 次元単位球面内に等長的にはめ込まれた Clifford トーラスは、もし平均曲率が定符号ならば、標準的に埋め込まれた Clifford トーラスと合同であることを証明した。

(4) 上記の成果 (3) を改良し、3 次元単位球面内の平坦トーラスの平均曲率が「非負または非正」ならば直径予想が正しいことを証明した。さらに、この結果を応用することにより、3 次元単位球面内に等長的にはめ込まれた Clifford トーラスは、もし平均曲率が非負または非正ならば、標準的に埋め込まれた Clifford トーラスと合同であることを証明した。

(5) トーラスから 3 次元単位球面への平坦波面とよばれる写像について研究した。この写像は平坦トーラスから 3 次元単位球面への等長はめ込み写像の一般化である。この写像を 2 次元単位球面上の閉曲線対から構成する方法を開発し、この写像については、直径予想の反例が存在することを証明した。

(6) 上記の成果 (2) の別証明を与えた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① Y. Aihara,  
Deficiencies of holomorphic curves in algebraic varieties,  
to appear in Tohoku Math. J., 64 (2012),  
査読有。

② Y. Kitagawa and M. Umehara,  
Extrinsic diameter of immersed flat tori in  $S^3$ ,  
Geometriae Dedicata, 155 (2011), 105-140,  
査読有。

③ M. Umehara,  
A simplification of the proof of Bol's conjecture on sextactic points,  
Proceedings of Japan Academy, Series A, Mathematical Science, 87 (2011), 10-12,  
査読有。

[学会発表] (計 5 件)

① Y. Aihara,  
Deficient divisors of holomorphic curves,  
The 19th International Conference on  
Finite or Infinite Dimensional Complex  
Analysis and Applications, 2011年12月  
15日, Aster Plaza, Hiroshima

② Y. Kitagawa,  
Extrinsic diameter of immersed flat tori  
in the unit 3-sphere,  
Spanish-Japanese Workshop on  
Differential Geometry, 2011年2月15日,  
Faculty of Science, University of Granada

③ Y. Kitagawa,  
Extrinsic diameter of immersed flat tori  
in the unit 3-sphere,  
Differential Geometry and Tanaka Theory  
--Differential System and Hypersurface  
Theory--, 2011年1月25日, 京都大学数理解  
析研究所

④ 梅原雅頭,  
3次元球面の平坦トーラスの直径について,  
京都大学数学教室談話会, 2010年12月22日,  
京都大学数理解析研究所

⑤ 北川義久,  
 $S^3$ 内の平坦トーラスの直径に関する予想  
について,  
名城大学幾何学研究集会, 2010年3月10日,  
名城大学

[その他]

研究集会「Spanish-Japanese Workshop on  
Differential Geometry」のホームページ,  
[http://gigda.ugr.es/spanish\\_japanese/Home.html](http://gigda.ugr.es/spanish_japanese/Home.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

北川 義久 (KITAGAWA YOSHIHISA)  
宇都宮大学・教育学部・教授  
研究者番号：20144917

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

相原 義弘 (AIHARA YOSHIHIRO)  
福島大学・人間発達文化学類・教授  
研究者番号：60175718

梅原 雅頭 (UMEHARA MASAOKI)  
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・  
教授