

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号： 11501

研究種目： 基盤研究(C)

研究期間： 2009 ~ 2011

課題番号： 21540067

研究課題名（和文） ループ群と接触幾何学による平均曲率一定曲面の大域的構成

研究課題名（英文） Global construction of constant mean curvature surfaces in terms of contact geometry and loop groups

研究代表者 井ノ口 順一 (INOBUCHI JUN-ICHI)

研究者番号： 40309886

研究成果の概要（和文）：3次元双曲空間内の極小曲面は、5次元擬リーマン等質接触空間  $SL(2,C)/U(1)$  への  $f$ -正則写像からの射影で得られることを示した。単連結領域で定義されたデータ（ポテンシャル）から  $SL(2,C)$  のループ群を用いて、 $f$ -正則写像を構成する方法を与えた（新 DPW 法）。さらに  $f$ -正則写像から平均曲率が 0 でない一定値(1未満)の曲面をも構成する方法を与えた。新 DPW 法を用いて、円周群の作用で不変なリーマン計量をもつ極小曲面および平均曲率一定曲面を構成した。3次元ハイゼンベルグ群内の移動極小曲面を分類した。

研究成果の概要（英文）：We showed that minimal surfaces in hyperbolic 3-space are obtained as projections of  $f$ -holomorphic curves in the semi-Riemannian homogeneous contact space  $SL(2,C)/U(1)$ . By using the appropriate loop group splitting, for any prescribed potential, we can construct  $f$ -holomorphic curves in  $SL(2,C)/U(1)$ . It is shown that non-minimal constant mean curvature surfaces with mean curvature less than 1 can be obtained from  $f$ -holomorphic curves. By using this loop group method (new DPW-method), we constructed radially symmetric constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space. We classified minimal translation surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：平均曲率一定曲面・接触幾何学・ループ群・調和写像・DPW法

## 1. 研究開始当初の背景

(1)3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面の単位法線場(ガウス写像)は、2次元球面に値をもつ調和写像である(調和写像は、エネルギー汎関数の停留点として定義

される幾何学的変分問題の解である)。この事実に基づき、Dorfmeister, Pedit, Wu の3氏により3次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面に対する「ループ群論的ワイエルシュトラウス構成法」が与えられた

(1998)。この方法は現在「DPW 法」とよばれ「平均曲率一定曲面の微分幾何学」の中核となっている。今日見られるようになった平均曲率一定曲面の画像の多くは DPW 法を原理とする数値計算ソフトウェア CMC-Lab(N. Schmitt 氏作成)により作成されている。

3次元ユークリッド空間内の曲面のガウス写像が値をもつ2次元球面は、コンパクト・リーマン対称空間の典型例である。DPW 法はコンパクト・リーマン対称空間に値をもつリーマン面からの調和写像の構成理論を基礎にしている。

DPW 法の理論では「像空間が、リーマン対称空間であること」が本質的であり対称空間でない等質空間への拡張は困難を極め全く進展していない。

DPW 法の確立においては、2つの前提が必要となる。1つ目は「調和写像の零曲率表示」、2つ目は「ループ群の分解定理」である。零曲率表示とは、調和写像の方程式(非線型楕円型2階偏微分方程式)が、「リーマン面上の接続のなす1径数族がすべて平坦である(曲率が零)」という方程式に書き換えられることを言う。リーマン面で定義され、リーマン対称空間に値をもつ調和写像は、この零曲率表示をもつ。ところが像空間が一般の等質リーマン空間の場合は、零曲率表示は一般には満たされない。これが DPW 法を等質リーマン空間に値をもつ調和写像へ一般化する上での障害である。等質リーマン空間に「標準簡約(naturally reductive)」という条件(これはリーマン対称空間より弱い仮定である)を課した場合、調和写像自体が更に許容的(admissible)という条件をみたせば零曲率表示をもつことが示されるが、この許容的という条件をみたく調和写像の例は知られていなかった。それゆえ対称空間ではない等質空間への調和写像の組織的構成論は、具体例すら提供されていないのが現状である。

(2)一方、3次元双曲空間の平均曲率一定曲面の性質・挙動は平均曲率の値により著しく異なる。(双曲空間の曲率が-1に正規化されているとき)平均曲率の値が1の場合は、3次元ユークリッド空間の極小曲面と局所理論的には等価であるため、複素解析学を用いて構成論・分類理論が発展している。この研究が進化した理由は、3次元ユークリッド空間の極小曲面に対する「ワイエルシュトラウス・エンネッパ-表現公式」の類似である表現公式が得られていることにある(Bryant・梅原・山田の公式)。また平均曲率の値が1より大きい場合は3

次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面に、局所理論的には等価である。したがって DPW 法を用いて構成理論が展開できる。

しかしながら平均曲率が1未満の曲面は3次元ユークリッド空間あるいは3次元球面  $S^3$  内に対応物が存在しない。これらの曲面は双曲幾何特有の曲面である。3次元双曲幾何学の観点からは最も興味深い研究対象であり、組織的、そして強力な構成理論は熱望されてきた。しかしながら DPW 法を適用することはできない。

前研究課題(基盤研究(C) 18540068)において、本研究者は以下の知見を基礎としてループ群論による「3次元双曲空間内の平均曲率一定曲面の構成法」を得た(Dorfmeister 氏、小林真平氏との共同研究)。

①双曲空間内の平均曲率一定曲面と実5次元等質空間  $SO(3,1)/SO(2)$  への調和写像(一般化されたガウス写像)との全単射対応を発見した。この5次元空間は対称空間でも複素多様体でもない。

②等質空間  $SO(3,1)/SO(2)$  は自然な接触構造と不定値リーマン計量をもち、それらは群  $SO(3,1)$  により不変である(標擬リーマン等質接触空間とよばれる構造をもつ)。この等質空間はこれまで、佐々木計量とよばれるリーマン計量を与えた上で接触幾何学において研究されてきたが、DPW 法の観点からはリーマン計量でない擬リーマン計量を与えることが本質的であることが判明した。またこの等質空間は標準簡約である。

③平均曲率一定曲面の一般化されたガウス写像は  $SO(3,1)/SO(2)$  の接触構造に接するはめ込み(接触幾何学においてルジャンドルはめ込みとよばれているもの)であり同時に調和写像である。この調和写像は許容的という条件を自動的にみたす。したがって零曲率表示をもつ。逆に  $SO(3,1)/SO(2)$  に値をもつルジャンドル且つ調和な、はめ込みを一般化されたガウス写像にもつ平均曲率一定曲面が存在する。

④擬リーマン等質接触空間  $SO(3,1)/SO(2)$  が等質空間  $SL(2,C)/U(1)$  と同型であることを用いて、 $SL(2,C)$  のループ群の分解定理を用いて、平均曲率一定曲面に対する「ループ群論的ワイエルシュトラウス構成法」を得た(以下「新 DPW 法」とよぶ)。この研究成果の最大の利点は平均曲率の値に影響されないという点にある(1より大きいか否かには関係がない)。

## 2. 研究の目的

本研究課題では、前研究課題(基盤研究(C) 18540068)によって得られた成果(新DPW法)を用いて、3次元双曲空間内の平均曲率一定曲面(極小曲面を含む)の具体的且つ大域的構成を行うことおよび、具体的構成を通じて、新DPW法の改良を行うことを主要な目的とした。

(1)5次元擬リーマン等質接触空間 $SL(2,C)/U(1)$ の幾何構造を更に詳しく調べ、「新DPW法」における幾何構造(とくに接触構造)の役割を解明する。

その成果をもとに「ループ群論的構成法」の改良と非自明な位相を曲面の大域的構成を行う。

(2)接触構造の観点から他の微分幾何学の問題・ソリトン方程式への応用を考察することも目的とした。

## 3. 研究の方法

(1)5次元擬リーマン等質接触空間 $SL(2,C)/U(1)$ の接触擬リーマン多様体としての性質を詳しく調べ、平均曲率一定曲面(とくに極小曲面)の「一般化されたガウス写像」のみたす条件を接触構造の観点から明らかにする。

(2)新DPW法においては、3次元双曲空間を $SL(2,C)/SU(2)$ というリーマン対称空間として表現している。一方、3次元双曲空間は $SL(2,C)$ の可解部分群(solvable Lie subgroup)とも同一視できる。この事実に基づき、新DPW法をより一般の「3次元リー群」内の極小曲面に対して拡張できるかどうかについても考察する。

## 4. 研究成果

(1)Josef Dorfmeister氏(ドイツ・ミュンヘン工科大学)・小林真平氏(弘前大学)との共同研究を継続して行い、以下の成果を得た。

① $SL(2,C)/U(1)$ は擬リーマン4-対称空間(semi-Riemannian 4-symmetric space)の構造をもつ(この構造は $SO(3,1)/SO(2)$ の表示では発見し難い)。この構造を用いて

原始写像(primitive map)とよばれる概念が定義される。3次元双曲空間内の曲面に対し、その曲面が「極小曲面であること」と「一般化されたガウス写像が原始写像であること」が同値であることを証明した。

②一般化されたガウス写像の像空間である $SL(2,C)/U(1)$ は3次元双曲空間の「単位接ベクトル束」とも同一視される。この同一視に着目し、ある種の $f$ 構造(偶数次元多様体上の概複素構造の奇数次元的類似)

とよばれる幾何構造を導入すると、原始写像という条件が $f$ 構造に関する正則性条件(holomorphic map)と同値であることを証明した。これまで $f$ 正則曲線についてはRawnsley氏による研究以来、多くの研究成果があるが、すべて像空間は偶数次元(概エルミート多様体で特殊な条件をみたすもの)であった。奇数次元空間への非自明な $f$ 正則写像の初めての例であり、かつ組織的構成法を与えた点が特筆すべき点であると考えられる。

③ $f$ 構造を単位接ベクトル束に与えることにより、単位接ベクトル束を双曲空間に対するツイスター空間の類似とみなしうることが明らかになった。この結果から、極小曲面のガウス写像は、もとの曲面(調和写像)のツイスター・リフトの類似と考えられる。したがって本研究における「極小曲面のループ群論的構成法」はこれまで偶数次元の像空間における「調和写像のツイスター理論」として研究されてきた理論の3次元における類似とみなせるという新たな知見を得た。この知見に基づき本研究における「極小曲面のループ群論的構成法」の高次元双曲空間内の極小曲面へ一般化するという新たな可能性が示唆された。

④平均曲率が0でない場合の構成法の改良を行った。射影幾何学や共形幾何学で用いられる「双曲空間の光円錐模型(projective lightcone model)」を用いて、次の結果を得た。曲率が-1の双曲空間内の「平均曲率が1未満で0でない一定値の曲面」を、「曲率が-1とは異なるある特定値の双曲空間内の極小曲面」として移植させることにより、「ツイスター構成法」に帰着できることが証明できた。この発見は、本研究課題における「平均曲率が1未満で一定の曲面の構成法」の仕組みを微分幾何学的に説明するものである。

⑤④の結果を用いて前研究課題で得ていた単純な曲面、回転面、円周群の作用で不変な曲面(radially symmetric surface)の構成法を簡略化した。

以上の成果を雑誌論文①として発表した。また学会発表③,⑤,⑥,⑦で発表した。

(2)平均曲率一定曲面のループ群論的構成を数値解析的観点から理解するために、曲線及び曲面の離散化を行う事が有効である。

①この観点から平面曲線の離散化を梶原健司氏・松浦望氏・太田泰広氏と共同で研究し、離散化された平面曲線(差分平面曲線)のタウ関数による具体的表現を与えた。とくに、ソリトン解および脈動解(ブリーザー解)とよばれる差分mKdV方程式の解から得られる差分平面曲線の離散運動を記述することに成功した。この成果は

4人の共著論文(雑誌論文③)として発表した。

②梶原健司氏・松浦望氏・太田泰広氏との共同研究を継続し、雑誌論文③で得た「差分 mKdV 方程式の解から定まる差分平面曲面の運動」から適切な連続極限操作を施すことにより、「差分平面曲線の連続運動」が復元できることを示した。また半離散 mKdV 方程式の解から得られる差分平面曲線の連続運動をタウ関数を用いて記述することに成功した。この成果は梶原氏、松浦氏、太田氏との共著論文(雑誌論文⑦)として発表。

③Bao-Feng Feng 氏、梶原健司氏、丸野健一氏と共同研究を行い、雑誌論文③で得た「差分 mKdV 方程式の解から定まる差分平面曲面の運動」とホドグラフ変換との関連を解明した。この成果は Feng 氏、梶原氏、丸野氏との共著論文(雑誌論文⑧)として発表した。以上①, ②, ③の成果は学会発表①, ②においても発表した。

(3) (前述したように) 3次元双曲空間はリー群の構造をもつ。本研究課題で確立した双曲空間内の平均曲率一定曲面に対するループ群論的構成法(新 DPW 法)を、より一般の3次元等質空間へ拡張することは困難を極める。

①一般化への第一歩として、3次元ハイゼンベルグ群内の平均曲率一定曲面の構成法を考察した。ハイゼンベルグ群  $Nil_3$  はサーston幾何のモデル空間のひとつであり、同時に3次元等質接触リーマン空間の典型例でもあるため、一般化を考察する上でまず最初に考察する空間として適切であると考えられる。ループ群論的構成法確立の準備としてハイゼンベルグ群のリー群構造を用いて「移動曲面」の概念を導入し、「移動曲面で極小曲面であるもの」を Rafael Lopez 氏(スペイン・グラナダ大学)、Marian-Ioan Munteanu 氏(ルーマニア・ヤッシー大学)との共同研究で分類した。この成果は3人の共著論文(雑誌論文④)として発表した。

②3次元リー群内の曲面の「等質幾何学」の観点からの研究を行った。既に前研究課題において内藤博夫氏(山口大学)と3次元リー群内の軌道型曲面の分類に着手していた。

2次元実特殊線型群内の軌道型曲面の分類に成功した。したがって3次元ユニモデューラー型リー群の軌道型曲面の分類が完了した。この成果は内藤氏との共著論文(雑誌論文⑨)として発表した。

③サーston幾何学におけるモデル空間のうち、ハイゼンベルグ群  $Nil_3$ 、特殊線型群  $SL(2, R)$ 、特殊ユニタリ群  $SU(2)$  はいずれも3次元等質接触リーマン空間である。

一方、新 DPW 法の確立において3次元双曲空間をリーマン対称空間  $SL(2, C)/SU(2)$  として表示した上で、2次元エルミート行列全体のなす実線型空間  $Her(2, C)$  の超曲面として実現しておくことが研究を進める上で極めて有効であった。そこで  $Nil_3, SL(2, R), SU(2)$  の超曲面としての取り扱い方法についての研究を並行して行った。これらは複素2次元の複素空間形(複素射影平面及び複素双曲平面)内の超曲面として実現されるが、擬対称(pseudo-symmetric)とよばれる条件をみたす超曲面として特徴づけられることを濱田龍義氏(福岡大)との共著論文(雑誌論文⑩)として発表した。雑誌論文⑩の結果は高次元化することができた(雑誌論文⑤)として発表)。

(4) 本研究で中心的な役割を演じた等質空間  $SL(2, C)/U(1)$  は3次元双曲空間の単位接ベクトル束と同一視された。一般にリーマン多様体の単位接ベクトル束は等質接触多様体にはならない。本研究の成果のうち、「等質接触多様体である単位接ベクトル束」という性質に着目し、他の微分幾何学の問題への応用可能性を探るため、一般のリーマン多様体の単位接ベクトル束の曲率および対称性について、趙宗澤氏(韓国・全南大学)と共同研究を行った(雑誌論文⑩として発表)。

(5) 3次元等質空間  $Nil_3, SL(2, R), SU(2)$  内の曲線と曲面の微分幾何を展開するために、研究指針となる具体例を豊富に得ておく必要がある。Ji-Eun Lee 氏(韓国・慶北大学)と共同研究を行い、これらの空間内の接触幾何学的部分多様体(接触的重調和部分多様体及び調和平均曲率部分多様体)の分類を行った(雑誌論文②及び⑥として発表した)。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

① J.F. Dorfmeister, J. Inoguchi and S.P. Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 印刷中, 査読有.

② J. Inoguchi and J.-E. Lee, Affine biharmonic biharmonic curves in 3-dimensional homogeneous geometries, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 印刷中, 査読有.

③ J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura,

and Y.Ohta, Motion and Backlund transformations of plane discrete curves, Kyushu Journal of Mathematics, 印刷中, 査読有.

④ J.Inoguchi, L.Lopez and M.I.Munteanu, Minimal translation surfaces in the Heisenberg group  $Nil_3$ , Geometriae Dedicata, 印刷中, 査読有.

⑤ J.Inoguchi, Real hypersurfaces in complex space forms with pseudo-parallel Ricci operator, Geometry-Dynamical Systems (Electronic) 14, 69-89, 2012, 査読有.

⑥ J.Inoguchi and J.E.Lee, Submanifolds with harmonic mean curvature in pseudo-Hermitian geometry, Archivum Mathematicum, Brno 48, 15-26, 2012, 査読有.

⑦ J.Inoguchi, K.Kajiwara, N.Matsuura and Y.Ohta, Explicit solutions to semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, Journal of Physics A 45, Article No. 045206, 査読有, 2012.

⑧ B.-F.Feng, J.Inoguchi, K.Kajiwara, and M. Maruno, Discrete integrable systems and hodograph transformation arising from motions of discrete plane curves, Journal of Physics A 44, Article No. 395201, 査読有, 2011.

⑨ J.Inoguchi and H.Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups II, Hokkaido Mathematical Journal 40, 411-429, 査読有, 2011.

⑩ J.T.Cho and J.Inoguchi, Curvatures and symmetries of tangent sphere bundles, Houston Journal of Mathematics 37, 1125-1142, 査読有, 2011.

⑪ T.Ichihama, J. Inoguchi and H.Urakawa, Classification and isolation phenomena of biharmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica 30, no.2, 15-48, 2010, 査読有.

⑫ T.Hamada and J. Inoguchi, Ruled real hypersurfaces in complex space forms, Kodai Mathematical Journal 33, 123-134, 2010, 査読有.

⑬ J.T.Cho, T. Hamada and J.Inoguchi, On three-dimensional real hypersurfaces in complex space forms, Tokyo Journal of Mathematics 33, 31-47, 査読有, 2010.

⑭ 井ノ口順一, とり扱いの難しい可積分方程式, 九州大学応用力学研究所研究報告 21ME-S2, 7-15, 査読無, 2010.

[学会発表] (計 7 件)

① 井ノ口順一, 差分幾何, 日本数学会幾何学分会 第 58 回幾何学シンポジウム, 2011 年 8 月 30 日, 山口大学.

② 井ノ口順一, 曲面の差分幾何, RIMS 研究集会, 可積分系数理の進化, 2011 年 8 月 17 日, 京都大学数理解析研究所.

③ 井ノ口順一, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space, 日本・スペイン微分幾何学研究集会(特別講演), 2011 年 2 月 14 日・16 日, スペイン・グラナダ大学.

④ 井ノ口順一, 3次元等質空間の微分幾何, 広島幾何学研究集会(特別講演), 2010 年 10 月 8 日, 広島大学.

⑤ 井ノ口順一, 3次元双曲空間の平均曲率一定曲面, 日本数学会秋季総合分科会幾何学分会特別講演, 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学.

⑥ 井ノ口順一, Twistorial construction of hyperbolic minimal surfaces, 国際会議「第 6 回中日友好幾何学研究集会」, 2010 年 9 月 5 日, 中国・西北大学.

⑦ 井ノ口順一, 3次元双曲空間の平均曲率一定曲面, 日本数学会幾何学分会 第 56 回幾何学シンポジウム, 2009 年 8 月 30 日, 佐賀大学.

[図書] (計 3 件)

① 井ノ口順一・太田泰広・寛三郎・梶原健司・松浦望、九州大学、離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012、2012、87-124

② 井ノ口順一、日本評論社、リッカチのひ・み・つ、2010、256

③ 井ノ口順一、朝倉書店、曲線とソリトン、2010、192

## 6. 研究組織

(1) 井ノ口 順一 (INOBUCHI JUN-ICHI)  
山形大学・理学部・准教授  
研究者番号：40309886

(2) 研究分担者 ( )

研究者番号：

(3) 連携研究者 ( )

研究者番号：

