様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　4 月　24 日現在

機関番号：12501
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009 ～2011
課題番号：21540068
研究課題名（和文）　ホモトピー論的対称性の研究

研究課題名（英文）　Symmetry from the homotopical viewpoint

研究代表者
丸山　研一　（MARUYAMA　KENICHI）
千葉大学・教育学部・教授
研究者番号：70173961

研究成果の概要（和文）：幾何学において、空間の対称性は主要な研究課題として常に中心的な役割を演じてきたことは周知のことである。本研究においては位相幾何学、特にホモトピー論における空間の対称性について考察を行った。他の幾何学の場合と同様に、ホモトピー論においても空間の対称性はその自己同型写像によって記述される。今回の研究では、ホモトピー自己同型の代数的な構造が、代数学における所謂線形群と極めて近い性質をもつことを示した。結果は非常に一般的な空間に対して成立し、この分野の結果としては重要なものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：Study of symmetry has been one of the major subjects in geometry for centuries. In our study we investigated symmetry from the homotopy theoretical viewpoint. As in the other geometrical theories, the symmetry of a space is described by a certain set of automorphisms. Our main result in this study is that the algebraic structure of the automorphisms is closely related to the linear groups in algebra. This result is valid for quite general spaces and hence it is thought as a fundamental result of the field.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何学

１．研究開始当初の背景

数学において、対称性の概念は他の概念と結びつきながら考察されてきた重要な概念である。方程式の解法の可能性についての有名なガロアの理論や、それを起源とする群の理論などに限らず、広い意味で対称性に関連する分野・概念は甚だ多く知られている所である。特に幾何学での対称性は、分野の誕生時からその根底に横たわるものである。古典的なユークリッド幾何学において、図形の合同を具体的なモデルで捉えようとすれば、「合同変換」という空間や平面の対称性と不可分な事象に必然的に行き着くこととなる。更にその他の多くの良く知られた基本的な幾何学概念にも対称性は深く関わっているものと考えられ、幾何学という分野自体を定

義し、規定しているのも対称性であると言っても過言ではない。
　現代では幾何学と呼ばれる分野は非常に広範囲の数学の領域を意味するが、現代数学の中で研究されている色々な幾何学の分野においては、それぞれの幾何学の意味での対称性が存在する。ここで鍵となる概念は自己同型である。
　幾何学の諸分野では、それぞれが研究対象とする空間の集まりを固有に持ち、その集まりは圏（カテゴリー）と呼ばれている。いずれの幾何学分野においても、考察している圏にはそこでの自己同型群が存在し、これこそが正にその幾何学における空間の対称性を規定・定義するものとなる。
　位相幾何学においてもまた、図形の対称性が自己同相群、ホモトピー自己同型群や変換群などを通して活発に研究されており、中でも曲面の写像類群については目覚ましい進歩が得られつつあるのは良く知られたことである。更に、理論物理学と幾何学とがミラー対称性と呼ばれる現象によって関連している事実もまた近年明らかとなっている。また、化学や生物学などにも数学が対称性を通して関連する事実が散見できる。
　この様に「対称性」という言葉を鍵として考えるならば、関連する分野は数学のみならず自然科学の広い部分に及んでいるものということが出来る。

２．研究の目的
　位相幾何学、特にホモトピー論における図形の対称性を研究することが目的である。
　位相幾何学は連続的な変形の下で変わらない様な図形の性質を調べることが一つの大きな目的である。ホモトピー論は位相幾何学の一分野であるが、図形の変形を最も一般的な形で許容する理論である。同時に、高度に代数化されており、代数学とホモトピー論は互いに深い相関関係を持つことが知られている。
　本研究では、対称性の概念をホモトピー論の枠組みで捉え理解することを目標とする。また、他の様々な幾何学の場合と同様に、代数学（特に群論）との接点を探り、ホモトピー論的な対称性を代数学の言葉で記述し、有効な代数的不変量を見出すことを目的とする。さらに、関連するホモトピー論についても研究を進め、空間の持つ対称構造について詳細な情報をえることが大きな目標である。

３．研究の方法
　研究課題は細目としては幾何学に属しているが、その内容は直接的に代数学、特に群論の一分野に深く関連している。この為双方の関連分野について平行して研究を進める必要性がある。本研究に関連する研究を行っている研究者が海外の研究機関に多く所属しているため、それらの研究機関を訪問し、研究について最新の知見を得ると同時に研究成果をセミナー、コロキュウムなどで発表を行った。

４．研究成果
　本研究のおける研究成果は、

（１）ホモトピー自己同型群（自己ホモトピー同値類群）についての群論的性質の解明。

（２）図形の対称性に関連する写像空間の幾何学的な性質の解明。

（３）ゴットリープ群に関する研究。（球面の一点和空間の場合）

の３項目に大別することが出来るが、それぞれ互いに関連する部分も多い。以下それぞれの項目について詳細を述べる。

（１）
①空間のホモトピー自己同型群がもつ特徴的な代数構造を研究し、その群が代数学に於ける所謂線形群とよく似た性質をもっていあることを示した。中でも、現在 Tits の定理として知られている非常に一般的な定理の類似定理が、ホモトピー自己同型群についても多くの場合成立することが分かった。更に、この類似定理が必ずしも無条件に成立するわけではなく、基本群が高次のホモトピー群に強い形で作用する場合や、空間のサイズが大きい場合には成立しないことがあることも分かった。定理の証明には通常のホモトピー論の他、代数群の理論と組み合わせ群論及び無限群論についての手法を使用した。

②群のサイズを大まかに知る指標としてランクの概念がある。ランクは群が可換群の場合は良く知られた通常のランク（階数）と一致しているが、更に一般の群に対しても定義することが可能である。ザッセンハウス等によって定義された古典的な群の不変量の一つである。
　ホモトピー自己同型群のランクについて、それがいつ有限となるかどうかを知ることが当初の目標の一つであった。これに関する最も早期の結果は文献１におけるもので、その後大きな進展は見られないままであった。
　本研究では、①で得られた結果を直接用いることによってランクが有限であるための必要十分条件を純代数的な言葉で表わすことができた。具体的には、ランクが有限となることとホモトピー自己同型群が有限指数の可解部分群を持つことが同値であることが分かった。

③群の複雑さを計る指標として growth の概念がミルナーにより６０年代に定義され、その後グロモフらによってその性質が解明されて来ている。この不変量を具体的に求めることは非常に困難であるが、二つのタイプの族があり、それぞれ多項式的または指数的と呼ばれている。良く知られた群は多くの場合いずれかの族に含まれている。本研究ではホモトピー自己同型群も二つのタイプのいずれかに属す群でしかあり得ないことを示した。

④部分群として含まれる冪零群についての研究。

　ホモトピー自己同型群にはホモトピー群やホモロジー群の核として現れる特殊なべ冪零部分群が存在する。これらの部分群に対しては低次元から帰納的に、完全ではないが、群を求めて行く手立てが存在する。特に②で述べた群のランクについて冪零群は親和性があり、群構造を決定できないまでもランクを或る程度知ることが可能である。歴史的にもこれらの冪零部分群に対してそのランクの上限を与えるという試みは何人かの研究者によって試みられてきた。他方、ランクの下限を与える手段は全く知られていなかった。本研究では未だ粗い評価ではあるが、上記の冪零群に対してのランクの下限を与える公式を見出すことが出来た。鍵となったのは冪零作用の概念である。一般的に群が他の群に作用するとき、冪零群を定義するときにあらわれる中心列を模して作用の中心列を考えることが出来て、冪零作用の概念が定義される。冪零群が可換群に冪零的に作用するとき、作用している冪零群のランクと作用を受けている可換群のランク（通常の）階数とにはある関連性があることが分かった。この純代数的な結果を繰り返し適用することで求める部分群のランクの下限公式が得られた。

（２）
　空間の自己写像全体の成す写像空間のホモトピー群を空間をリー群に採り考察を行った。
（１）で述べたホモトピー自己同型群は空間の自己ホモトピー同値写像を集めた写像空間の０次のホモトピー群であると解釈できる。従ってこの写像空間の高次のホモトピー群を求めるという問題は自然な問いであり、更に深い空間の対称性のホモトピー的な解明につながることは推測されることである。また、リー群を構造群とする主バンドルのゲージ群を求める際にリー群の自己写像空間のホモトピー群を求めることが必要であることが知られている。本研究に先行する研究（文献２）において低次元の古典リー群の場合にホモトピー群の決定を行ったが、本研究では特に例外型リー群（Ｇ２）についての研究を行った。具体的には文献２においては１次のホモトピー群（即ち基本群）を決定したが､これを４次のホモトピー群まで拡張した。
　Ｇ２については、その空間の胞体構造は良く知られているが、上記の古典群の場合と異なり胞体の個数が多く、計算には工夫を要する。手法は標準的なものであるが、計算の過程でリー群Ｇ２とその部分複体に関するいくつかの詳細な結果を得ることが出来た。最終的には当初の計画より進んだ結果が得られた。

（３）
　ゴットリープ群は空間のホモトピー群の部分群で、ある拡大条件を持つ元からなるものとして定義される。この拡大条件は、例えば空間が連続的な積を持つ場合にホモトピー群に対して常に成立するものであり、自然な条件として捉えられている。他方、この群を決定する方法は一般に確立しているわけではなく、個々の空間について個別に計算等が行われている状況である。
　本研究では特に空間として球面の一点和の場合を考察した。目標としては、そのホモトピー群の元がゴットリープ群に属すか否かを他の既知の不変量によって記述することを設定した。現在のところホモトピー群の元がゴットリープ群に属すための十分条件が得られた段階であるが、必要条件については部分的な条件が得られた段階であり、更なる考察が必要とされている。
　副次的な結果として、非可換環の基本積について、これまで文献にない新たな結果が得られ、今後の応用が期待される。

文献
１．M.Arkowitz and C. Curjel、Groups of homotopy classes、LNM、Springer 4、1967.

２．K.Maruyama and H. Oshima、Homotopy groups of the spaces of self-maps of Lie groups、J. Math. Soc. Japan、Vol.60, 2008、767-792.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）
①丸山　研一、The groups of self-homotopy equivalences and the Tits alternative、Bulletin of London Mathematical Society、

査読有、Vol. 43、2011、1191‐1197.

②丸山　研一、On the rank of the group of self-homotopy equivalences、千葉大学教育学部研究紀要、査読無、59 巻、2011、275-277.

③岩瀬　則夫、酒井　道宏、 Topological complexity is a fibrewise L-S category、Topology Appl、査読有、Vol.157、2010、10-21.

④岩瀬　則夫、Categorical length, relative L-S category and higher Hopf invariants、 Algebraic topology old and new、 Banach Center Publ 、Polish Acad. Sci. Inst. Math、 査読有 Vol.85、2009、205-224

〔学会発表〕（計 3 件）
①丸山　研一、The groups of self-homotopy equivalences and the Tits alternative、トポロジーセミナー、2011 年 9 月 21 日、マラガ大学（スペイン）

②丸山　研一、The groups of self-homotopy equivalences and the Tits alternative、トポロジーセミナー、2010 年 9 月 23 日、ルーバンカトリック大学（ベルギー）

③丸山　研一、　対称性をめぐって、茨城大学理学部談話会（兼先端科学トピックス）、2009 年 11 月 10 日、茨城大学

〔その他〕
ホームページ等

http://www.e.chiba-u.jp/~maruyama

６．研究組織
(1)研究代表者
丸山　研一（Maruyama Kenichi）
千葉大学・教育学部・教授
研究者番号：70173961

(2)連携研究者
岩瀬　則夫（Iwase Norio）
九州大学大学院数理学研究院・教授
研究者番号：60213287