様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１５４００６９
研究課題名（和文）低次元位相不変量、双曲体積とペレルマン不変量

研究課題名（英文）Low-dimensional topological invariants, hyperbolic volume and Perelman invariants

研究代表者
久我　健一（Kuga, Ken-ichi）

千葉大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：３０１８６３７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円、（間接経費）　　1,050,000円

研究成果の概要（和文）：この課題では、ハミルトンのリッチ・フローの手法を、４次元多様体の位相の理解、より一般に低次元多様体の位相不変量の理解に応用する可能性について調べた。３次元においては、ハミルトンとペレルマンの仕事により、特異点の生成の状況がよくわかっているのに対し、４次元においては、特異点は不安定に変化し、この方向での系統的理解には至らなかった。周辺的な結果として、トーラス結び目等のコバノフ・ホモロジーの計算などを行った。

研究成果の概要（英文）：We investigated the possibility of applying the technique of Hamilton's Ricci flow to the understanding of the topology of 4 dimensional manifolds, or more generally, to the understanding of various topological invariants in low-dimensional topology. While in dimension three, the formation of singularities is well understood due to the works of Hamilton and Perelman,in dimension 4, the singularity seems unstable with respect to the initial metiric, which eventually prevented our systematic understanding of the formation in dimension 4 during this period of study. Some peripheral computation concerning Khovanov homology of some links were performed.

研究分野： 人文学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 低次元位相不変量　双曲体積

１．研究開始当初の背景

（１）R. ハミルトンによって３次元多様体論において、リーマン計量に関する熱方程式と考えられるリッチ・フローの応用が強力な結果を出すことが明らかになってきた。特に２００３年頃、G. ペレルマンはハミルトンのリッチ・フローの研究を推し進めることによって、トポロジーでの長年の重要問題であったポアンカレ予想の解決を含むサーストンの幾何化予想を解決し、これによって３次元多様体のトポロジーへの理解が飛躍的に進展した。他方、４次元においては、リッチ・フローは限定的な結果しか得られていない状況が続いていた。４次元ホモトピー球面については初期計量の曲率に適当な正値性の仮定をすると３次元と同様な結果が出ることが知られていたが、一般的な計量での同様の結果は微分カテゴリーでの４次元ポアンカレ予想と関連しており、位相的４次元ポアンカレ予想の解決と対比をなしている。
４次元エキゾティック球面が存在する可能性もあるが、そうでない場合、ホモトピー球面上のリッチ・フローの収束によって、微分可能４次元ポアンカレ予想が証明される可能性があった。

（２）低次元トポロジーにおいては、１９８４年のジョーンズによる新しい結び目多項式の発見、およびジョーンズ多項式に関するウィッテンの３次元多様体の不変量としての解釈を契機として、結び目や３次元多様体の位相不変量が次々に発見された。しかし、これらの不変量の幾何的意味は、あるいは基本群がどのような幾何的意味をもつのかについては、理解が進んでいない。例えば、基本群やホモロジー群といった古典的不変量や、体積のような幾何的量との関係の理解が求められていた。特に双曲結び目のカラー付きジョーンズ多項式と双曲体積との関係よ予想する体積予想は、この状況を代表する重要な問題である。

（３）ジョーンズ多項式に関して、これを「カテゴリー化」するコバノフ・ホモロジーが２０００年頃発見された。これはカフマンブラケットを用いた組み合わせ的な定義で、その幾何的意味はさらに不明であるが、従来ゲージ理論を用いて証明されていたミルナー予想がラスムッセンによってコバノフ・ホモロジーによって再証明され、ゲージ論との関連が示唆されていた。

２．研究の目的

（１）３次元幾何化予想のペレルマンによる解決において用いられたエントロピー的ないくつかの不変量を、低次元トポロジー、とくに４次元多様体の微分位相構造の理解に利用する方法を見出すために、非特異正規 Ricci 流をもつ多様体に対して Fang-Zhang-Zhang が予想として定式化した、オイラー標数と指数と simplicial volume に関する Hitchin-Thorpe-Gromov-Kotschick 型不等式を、Ricci 流の特異点を（ある程度）含めるという意味での拡張を探ること。関連して、体積評価を通して、双曲体積と Jones-Witten 不変量との関連から低次元多様体の、Chern-Simons 理論に関連する諸位相不変量との関連を探ること、またこれらのために、４次元 Ricci 流における特異点の生成の理解、とくに曲面ファイバー空間での与えられた初期計量について特異点の生成を調べること。また特異点のモデルを目指して４次元 Ricci Soliton の明示的具体例を調べること。

（２）一般にジョーンズ多項式から派生した結び目、あるいは低次元多様体の量子不変量を計算し、その意味を探ること。これについては（１）に述べたほかに、ジョーンズ多項式をカテゴリー化するコバノフ・ホモロジーの計算と幾何的意味を探ること。より具体的な問題として、ホモロジー的に thick な部分にジョーンズ多項式をこえる情報の多くを持っていると思われるコバホフホモロジーの仕組みを調べる手始めとして、トーラス結び目のコバノフホモロジーを計算すること。無限トーラスブレイドの ”安定 ” コバノフホモロジーを決定すること。

３．研究の方法

（１）リッチ・フローを用いて４次元多様体に関しても３次元多様体において成功した方法を適用しようとするとき、４次元における特異点の生成を理解する必要がある。しかし、４次元においては少なくとも局所的には２つの方向の断面曲率が独立に変化しうるので、この２つの断面曲率が等しくなる場合を境として、特異点の生成状況は不安定に変化する。そこで具体的な例で実験的に考察することがひとつの方法となる。

（２)、コバノフホモロジーを理解するために、これを具体的な結び目（絡み目）で、計算しようとすると、組合せ的に定義されているので原理的には可能であるが、この不変量の構成の基礎をなす ”交叉解消立方体 ” は結び目図形の交叉数の次元をもつ立方体の各頂点に、交叉解消のやり方によってきまるフロベニウス代数のテンソル積を配置したもので、交叉数が大きくなると、計算機を用いても実行困難になる。また、なんらかの結び目のクラスに関して一般性のある計算結果を得ることは難しい。そこで、スケイン関係式に対応したホモロジー長完全系列や、さらにそれをスペクトル系列(P. Turner)に整理した手法を用いて調べることが基本的な方

法である。これにおいて、これまでの研究で有効に用いられている主な手法は Lee 理論とよばれるコバノフホモロジーの変種を利用するものである。これは基礎となるフロベニウス代数を変形することで、非常に簡単な構造もつコホモロジーを構成するものである。実際、Lee コホモロジーは絡み目の成分数と成分間の絡み数だけで構造がきまり、それ以上の結び目の情報はもたない。しかし、コバノフホモロジーから Lee 理論への、次数フィルトレーションから決まる自然なスペクトル系列が存在するので、(例えば) Lee 理論によってコバノフホモロジーの階数が評価される場合がある。これらを用いると、ある種の結び目のコバノフホモロジーを計算することができる。たとえば、もっとも基本的な結び目と思われるトーラス結び目（絡み目）T(p,q)については p<=3 の場合に計算がなされる（Khovanov(p=2), Turner(p=3))。また２橋結び目やある種のプレッツエル結び目等についても計算が行われている。したがって、Turner のスペクトル系列と Lee のスペクトル系列をうまく利用することが主要な方法となる。ここにおいても、研究の難度は結び目図式の選択と、解消する交差点の選択につよく依存するので、適切な選択をすることも重要な方法といえる。

しかし、それであっても、これらの計算が有効に行われるのは限定的であることが十分予期される、実際、これらの方法が有効である例は、主に交代結び目に代表されるホモロジー的に thin な場合(Lee)であって、それは、この場合スペクトル系列の微分が自明になりやすく、微分の詳細を知る必要がないからである。　すると、もっとも基本的と考えられるトーラス結び目は非交代的結び目としてこの対極にあり、実はコバノフホモロジーの計算の困難を具現していると考えることもできる。実際トーラス結び目はホモロジー的に thick であり、上に述べた Khovanov,Turner の結果 p<=3 を超える計算は限られた例でしか行われていず、その例も計算機を用いても p=7,8 程度である。ところが、Rasmussen 不変量を用いたミルナー予想の証明にみられるように、トーラス結び目のような positive な結び目に対して、コバノフホモロジーは多くの幾何的情報を持っていると考えられる。逆に、交代絡み目のコバノフホモロジーはジョーンズ多項式と指数で決定されてしまうことがわかる（Lee）ので、コバノフホモロジーがもつジョーンズ多項式より強力な情報はホモロジー的に thick な部分にあるのであり、その純粋な具体例として、トーラス結び目のコバノフホモロジーを計算するということが、コバノフホモロジーのより深い理解に向けて、ひとつの道標的な問題である。

実際にトーラス結び目（絡み目）T(p,q)のコバノフホモロジーの計算は p=3,4 をこえると既存の方法では難しくなるように見える。例えば(Turner)スペクトル系列を用いようとして、交叉解消する交叉点を出来るだけ自然に選んでも、その結果がどのような絡み目になるのかの規則性さえ、なかなか捉えることが難しく見える。また、計算機を用いた具体的計算で p>=4 の場合の一般形（ポアンカレ多項式）を予想するのも困難に見え、数学的帰納法にのせることが簡単にできない。しかし、全てのトーラス結び目にこだわらなければ、例えば p と q に適当な関係を仮定すれば、計算過程で表れる絡み目図形が限定され、この方法で Stosic 等が限定的な結果を得ている。このような限定的な結果であっても、q を無限にもっていく場合のある種の安定ホモロジー群の結果は示唆されている。この視点は最近 E.Gorsky,A.Oblomkov, J.Rasmussen による"On stable Khovanov homology of torus knots" (2012)でも指摘されており、そこでは"無限トーラス結び目の安定コバノフホモロジー" Kh(T(n,infinity))がある非正則列から定まる Koszul 複体のホモロジーと双対になることが予想として提出されている。しかし、この中では、手法として新しいものや、基本的に新しい結果はえられていない。

トーラス結び目（絡み目）のコバノフホモロジーの計算を計算する方法の可能性として、ある種のフレアホモロジーとの関連性が挙げられると思われる。もっとも顕著なものは、Kronheimer-Mrowka による、(被約) コバノフホモロジーを E2 項にもつスペクトル系列が収束するある種の結び目のインスタントンフレアホモロジーの構成である。これによって、Kronheimer-Mrowka は結び目が自明であるのは（被約）コバノフホモロジーが自明（階数が１）であることが必要十分であることを得ている。　そこでコバノフホモロジーの計算において、このようなフレアホモロジーとの関連（スペクトル系列）を利用しようとするとき、一般にはフレアホモロジーの計算が難しいが、(特異点のある）接続のモジュライ空間によるインスタントンフレアホモロジーをトーラス結び目に限定すると、トーラス結び目の対称性（群作用）から、直接計算される可能性がある。実際 3 次元多様体に対するインスタントンフレアホモロジーの計算が具体的に有効に行われた最初の例の一つはザイフェルト多様体であった（Fintushel-Stern 他)。このように、ある種のフレアホモロジーの計算がトーラス結び目のもつ対称性（群作用）から計算されれば、これによって、コバノフホモロジーの階数が下から評価される可能性が生じる。

４．研究成果

（１）Gromov の simplicial volume と、Perelman 不変量、および Gromov-Hitchin

-Thorpe 型の不等式、非特異正規 Ricci 流の関連が調べられるようになってきているが、これらの手法が特異点を許容する Ricci 流に関して、特異点の手術も含めて、どのように拡張可能であるのかを調べるために、４次元における Ricci 流の特異点の生成について具体的な計算を行った。しかし比較的明らかな場合を除いて一般的な見通しはまだ立っていない状況である。建設的な手順の１つとして３次元の双曲体積の問題を理解する努力も行った。もちろん３次元においては Ricci 流の特異点は Hamilton と Perelman 達によって良く研究されている。simplicial volume，あるいは双曲体積は、位相と強く結び付いている。やや遠回りとも思えるが、体積予想の関連からタイヒミュラー空間（基本群の表現空間）の量子化、スケイン加群との関係なども調べた。

ハミルトンとペレルマンによって、３次元多様体の一般計量からスタートするリッチ・フローが、適当な手術のあと、ジェネリックには、双極構造に収束することが示され、これによって、３次元多様体の位相的、幾何的構造がかなり明瞭になったが、４次元に拡張するための本質的問題として、４次元におけるリッチ・フローが生成する特異点のい理解を目指した。しかし、初期計量によって、この状況が非常に不安定に変化することが重大な障害となり、系統的理解には至らなかった。

（２）杉山の論文①On a generalization of Deuring ' s results では虚２次体の整数環による複素積をもつ有理数体上の楕円曲線が素数 p で非特異還元をもつとき、これが ordinary か supersingular であるかが p があその虚２次体中で分裂するか素のままであるかで決まるという Deuring の結果のひとつの拡張が得られている。この結果は３次元球面中の結び目の観点から A 多項式との関連で意味のある結果である。

（３）稲葉他の論文② Normally contracting Lie group actions ではリー群の閉多様体への nomally contracting 作用の非存在性の結果が与えられている。これは一般次元の多様体に対する結果であり、またすべての unimodular リー群あるいは、central normally contracting 作用に関しては任意のリー群についてなりたつ結果である。手術付きリッチ・フローを、下部多様体が手術によって変化することを考慮に入れた上で、その上のリーマン計量全体のなす空間における力学系を定めていると考えることができ、将来的に重要な見方であると考えられるが、上記のような有限次元多様体一般で成り立つリー群作用の非存在定理は、このような力学系にもつ意味も大きい。

稲葉他の論文③ Countable limit sets of unimodal maps ではある種の可算極限点集合をもつ unimodal 写像の存在を示している。これもリッチ・フローを上述のような力学系とみる立場から有意義な結果である。

（４）初期の論文④ではトーラス結び目から決まる４次元球面中の２次元球面に関する Alexander quandle による coloring の結果であるが、当該研究の後半に考察したトーラス結び目のコバノフ・ホモロジーの計算に先行する結果である。

ここで、発表にはいたっていないが、双曲体積、およびコバノフ・ホモロジーに関連する研究を述べる。まず双曲構造と位相不変量の関係として、特にカラー付きジョーンズ多項式と双曲体積に関する体積予想のと関係を考察した。得に、３次元双曲多様体の理想四面体分割を用いたノイマン、ジッカートによる複素体積の計算とカシャエフの R 行列との関連を調べた。また双曲的結び目に対する A 多項式との関係や、ジョーンズ多項式をカテゴリー化するコバノフホモロジーとの関係にも視野を広げた。コバノフホモロジーについては具体的計算として、院生の強力を得て、いくつかの双曲結び目と４本以下のブレード表示をもつトーラス結び目についてコバノフホモロジーが部分的にではあるが、求められている。トーラス結び目の計算は一見初等的に見えるが、実際にはリーのスペクトル系列等を用いても、計算困難であり、ラスムッセン等の結果から見ても、コバノフ・ホモロジーの本質的部分を含んでいると考えられる。トーラス結び目のコバノフ・ホモロジーの計算は完全に決定するのは難しいと思われるが、適当な段階で公表する予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４　件）

① <u>Sugiyama, K</u>. On a generalization of Deuring ' s results,
Finite Fields and Their Applications (査読有) 26C (2014), 69-85
DOI:10.1016/j.ffa.2013.11.004

② <u>Inaba, Takashi</u>; Matsumoto, Shigenori; Mitsumatsu, Yoshihiko.
Normally contracting Lie group actions.
Topology Appl. (査読有) 159 (2012), no. 5, 1334--1338.
DOI:10.1016/j.topol.2011.12.012

③ <u>Inaba, T</u>.; Kano, Y. Countable limit sets of unimodal maps.
J. Dyn. Control Syst. (査読有) 16 (2010), no. 3, 319--328.
DOI:10.1007/s10883-010-9095-7

④ Asami,S; Kuga, K
Colorings of torus knots and their twist-spuns by Alexander quandles over finite fields,
J. Knot Theory Ramifications (査読有)
18 巻 no. 9, 1259-1270.2009 年
DOI:10.1142/S0218216509007452

〔学会発表〕(計　1　件)

① 稲葉　尚志: An attempt to define entropy of plane fields,
Plane Fields on Manifolds and Diffeomorphisms Groups 2011,
東京大学玉原国際セミナーハウス,
2011 年 11 月 2 日.

６．研究組織

(1)研究代表者
久我　健一（KUGA, Ken-ichi）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30186374

(2)研究分担者
稲葉　尚志（INABA, Takashi）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40125901

杉山　健一（SUGIYAMA, Ken-ichi）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90206441