

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 7日現在

機関番号：12605
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540071
 研究課題名（和文）ヘガード分解を利用したねじれノビコフホモロジーの計算，応用
 研究課題名（英文）Calculations of twisted Novikov homology by using Heegaard splitting, and its applications
 研究代表者
 合田 洋（GODA HIROSHI）
 東京農工大学・大学院工学研究院・教授
 研究者番号：60266913

研究成果の概要（和文）：ホモロジカリーファイバー結び目に焦点を当て、様々な不変量の具体的計算を行った。ホモロジーシリンダーがなすモノイドのアーベル商が有限生成でないことを，sutured フローホモロジーを使って証明した。ねじれノビコフホモロジーの計算を half-transversal gradient flow に付随するヘガード分解で行おうとすると，ある条件を満たさねばならないことが判明した。ジョンソン準同型を使い，ホモロジカリーファイバー結び目がファイバー結び目からどの程度離れているかを表す尺度となる量 $J(K)$ を定義した。そして，ファイバー結び目でないにもかかわらず $J(K)=\infty$ となるホモロジカリーファイバー結び目が無限個存在することを証明した。

研究成果の概要（英文）： We focus on homologically fibered knots, and we calculate some invariants for them concretely. We proved that the abelian quotients of monoids of homology cylinders are not finitely generated by using the sutured Floer homology. It turned out that a half-transversal flow needed to satisfy a condition when we calculated the twisted Novikov homology by using a Heegaard splitting associated with the flow. We define the notion $J(K)$ for a knot K using the Johnson homomorphisms. If a knot K is fibered, $J(K)=\infty$. We show that there are infinitely many non-fibered homologically fibered knots with $J(K)=\infty$.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー

1. 研究開始当初の背景

（1）研究代表者は先行研究にて，sutured 多様体に対するヘガード分解を定義し，それ

を利用したノビコフホモロジーとレフセツゼータ関数の計算方法を確立した。さらに先行研究にてねじれノビコフホモロジーを

定義し、ねじれアレキサンダー多項式との関係を記述した。

(2) **sutured** 多様体のヘガード分解に対するヘガード種数をハンドル数という。結び目補空間にこの設定を適用するとハンドル数は結び目のザイフェルト膜に依存することになる。一つの結び目に対し、様々なザイフェルト膜が存在するが、とりうるハンドル数の最小値をモース・ノビコフ数と呼ぶ。ねじれノビコフホモロジーや中西指数によるハンドル数およびモース・ノビコフ数の評価式を先行研究で得ていた。

(3) ホモロジーシリンダーを **sutured** 多様体に持つ結び目を決定し、それまでホモロジーシリンダーの不変量として研究されてきた基本群のマグナス表現、トーションを応用し、結び目がファイバー結び目になるか否かを判定する必要条件を得た。一方、Juhász, Ni, Kronheimer-Mrowka はホモロジープロダクトという概念を導入し、それぞれ、**sutured** フロアホモロジー、**sutured** モノポールフロアホモロジーを使ったファイバー結び目の必要十分条件を得た。これらのホモロジーの定義は、ヘガードフロアホモロジー、モノポールフロアホモロジーを研究代表者が定義したヘガード分解に適用したものである。これらの勉強、研究を通じて、研究代表者はホモロジーシリンダーとホモロジープロダクトは本質的に同じ概念であることに気づいた。そもそも、ホモロジーシリンダーは曲面の写像類群の研究に端緒がある。写像類群の研究の為の一つの方法であるジョンソン準同型が、具体的にホモロジーシリンダーにどの程度有効か という自然な問題が考えられた。

2. 研究の目的

多重値モース理論に付随して定義されるノビコフホモロジーという不変量を精密化し定義された、ねじれノビコフホモロジー（非可換ノビコフホモロジー）を研究対象とする。特に

(1) ヘガード分解を使ったねじれノビコフホモロジーの計算方法の確立。

(2) ねじれノビコフホモロジーによる、結び目のファイバー性の決定、モース・ノビコフ数の評価の精密化。

(3) ヘガードフロアホモロジー、**sutured** フロアホモロジーとねじれノビコフホモロジーの関係解明。さらにホモロジーシリンダーという舞台において、ここに登場した不変量およびジョンソン準同型の間関係、お互いの応用を試みることを目的にした。

3. 研究の方法

本研究課題全体を通して、具体例の計算が新

しい知見を得るために重要な働きをすることを考えたので、具体的な計算例を豊富に取り扱った。特にコンピュータを使った計算を多く行った。さらに本研究課題の代数的側面に明るいフランス、ナント大学の Andrei Pajitnov 教授や東京大学の逆井卓也氏と連絡を取り合い、研究を進めた。写像類群に関わる研究を行うのは初めてなので、既知と聞いた研究結果をその都度文献で確認し、研究結果が出た場合にはまめにレビューを受けるようにして研究を進めた。

4. 研究成果

ねじれノビコフホモロジーの計算をこれまで考察していたタイプのヘガード分解で行おうとすると、ある条件を満たさなければならないことが判明した。この条件は、「空間内のあるループに対応する基本群の元の表現が自明になる」というものである。海外共同研究者であるナント大学教授 Andrei Pajitnov 教授と連絡を取りながら、三次元球面内の結び目補空間でこの条件を満たす具体例を探したが、発見されるものは可換表現に対応するものばかりであり、「ねじれ」ノビコフホモロジーの本質を含むものは見つけられなかった。この条件がどの程度本質的なものなのか、三次元球面内でなく一般の多様体ならこの条件を満たす非可換表現が存在するか、という問題が残った。

ホモロジーシリンダーを結び目補空間にもつ結び目：ホモロジカーファイバー結び目に焦点を当て、様々な不変量の具体的計算を行った。ホモロジカーファイバー結び目のうち、ファイバー結び目でない結び目は交点数 12 の結び目から現れ、交点数が 12 のものは 13 個ある。この 13 個の結び目の補空間のマグナス表現から得られる不変量、トーション不変量の計算に成功した。その結果、これらの非ファイバー性がこれらの不変量いづれによっても判定出来ることがわかった。この計算は、結び目にザイフェルト膜を張りそこから得られる情報を整理した上に、最後はコンピュータを使い行われた。Higher-order アレキサンダー不変量がこのトーションとマグナス表現から得られる不変量に関わる部分に分解できることを証明した。

ホモロジーシリンダーがなすモノイドのアーベル商が有限生成でないことを、**sutured** フロアホモロジーを使って証明した。写像類群のそれが一般に自明であることから、ホモロジーシリンダーのモノイドが写像類群と比較して非常に大きいことが判明した。

ジョンソン準同型を使い、ホモロジカーフ

ファイバー結び目がファイバー結び目からどの程度離れているかを表す尺度となる量 $J(K)$ を定義した. この量は 2 以上の自然数の値を取り, 小さい程ファイバー結び目と離れていることを表す指標である. K がファイバー結び目のときは $J(K)=\infty$ となる. まず最初に交点数が 12 のホモロジーカーファイバー結び目に対してこの量を計算した. その結果, これらの結び目に対してはいずれも $J(K)=2$ となった. 計算結果を整理するのに, ある次数付き自由リー代数をグラフ化したものを使用した, この部分は今後整理する必要があると感じた.

さらに, ファイバー結び目でないにもかかわらず $J(K)=\infty$ となるホモロジーカルファイバー結び目が無限個存在することを証明した. さらに任意の自然数 k に対して, $J(K)=k$ となる結び目が存在することも判明した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Factorization formulas and computations of the higher order Alexander invariants for homologically fibered knots, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, Vol. 20, 2011, 1355–1380. DOI: 10.1142/S0218216511009303
- ② Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Johnson homomorphisms as fibering obstructions of homologically fibered knots, *数理解析研究所講究録*, 査読無, Vol. 1747, 2011, 47–66.
- ③ Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Abelian quotients of monoids of homology cylinders, *Geometriae Dedicata*, 査読有, Vol. 151, 2011, 387–396. DOI: 10.1007/s10711-010-9540-5
- ④ Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Higher-order Alexander invariants for homologically fibered knots *数理解析研究所講究録*, 査読無, Vol. 1716, 2010, 84–98.
- ⑤ Hiroshi Goda, Chuichiro Hayashi, Hyun-Jong Song, Dehn surgeries on 2-bridge links which yield reducible 3-manifolds, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 査読有, Vol. 18, 2009,

917–956.

DOI: 10.1142/S0218216509007233

[学会発表] (計 10 件)

- ① Hiroshi Goda, Homology cylinders, Morse-Novikov numbers and Johnson homomorphisms, Tokyo Workshop on Low-dimensional Topology, 2012年3月20日, 東京工業大学.
- ② Hiroshi Goda, Fibered knots, Seifert surfaces and Johnson homomorphisms, *Seminaire de Topologie, Geometrie et Algebre*, 2012年3月15日, University of Nantes, フランス.
- ③ 合田 洋, Additivity of Handle Number and Morse-Novikov Number of a small Knots, 上越大トポロジーセミナー, 2012年2月20日, 上越教育大学.
- ④ 合田 洋, Johnson homomorphisms and homologically fibered knots, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 2011年9月29日, 信州大学.
- ⑤ 合田 洋, Homologically fibered knot の局所変形, *Knots in east Osaka*, 2011年3月10日, 大阪電気通信大学.
- ⑥ 合田 洋, $(1,1)$ -knot の unknotting tunnel について, *結び目の数学III*, 2010年12月21日, 日本大学文理学部.
- ⑦ Hiroshi Goda, Johnson-Morita homomorphism and homological fibered knots, *Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics*, 2010年3月9日, 広島大学.
- ⑧ 合田 洋, Abelian quotients of monoids of homology cylinders, 日本数学会トポロジー分科会一般講演, 2009年9月24日, 大阪大学.
- ⑨ 合田 洋, $(1,1)$ -knot に対する knot Floer homology の計算, 夏の学校「結び目とホモロジーおよびその周辺」, 2009年8月25日, 名古屋大学.
- ⑩ Hiroshi Goda, Homology cylinders in knot theory, *Geometric Topology in 3 and 4 Dimensions*, 2009年6月25日, Univ. of California, Davis, USA.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

合田 洋 (GODA HIROSHI)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：60266913

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし