

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月17日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540073

研究課題名（和文）コンパクトおよび非コンパクト等質空間上の複素構造についての研究

研究課題名（英文）Complex structures on compact and non-compact homogeneous spaces

研究代表者

長谷川 敬三（HASEGAWA KEIZO）

新潟大学・人文社会・教育科学系・教授

研究者番号：00208480

研究成果の概要（和文）：「等質多様体の複素幾何学」の研究分野における，ケーラー構造の研究から擬ケーラー構造・局所共形ケーラー構造等の非ケーラー構造の研究への拡張，また有界対称領域の研究から非対称・非有界等質領域の研究への拡張を主眼に置いて研究を進めている。等質局所共形ケーラー多様体の構造定理，および4次元局所等質局所共形ケーラー多様体の分類等の基本的な結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In the field of complex geometry on homogeneous manifolds, we have been studying extensions of Kaehler structures to non-Kaehler structures, such as pseudo-Kaehler structures, locally conformally Kaehler structures, and an extension of bounded symmetric domains to non-symmetric or unbounded homogeneous domains. We have obtained some basic results including a structures theorem of homogeneous locally conformally Kaehler manifolds and a classification of four dimensional locally homogeneous locally conformally Kaehler manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素多様体，等質空間，概複素構造，ケーラー構造，局所共形ケーラー構造

## 1. 研究開始当初の背景

「等質多様体の複素幾何学」の研究分野における，ケーラー構造の研究から擬ケーラー

構造(pseudo-Kaehler structure)・局所共形ケーラー構造 (locally conformally Kaehler structure)・四元数ケーラー構造 (quaternion Kaehler structure)の研究へ

の拡張，また有界対称領域の研究から非対称・非有界等質領域の研究への拡張は，複素幾何学における研究の歴史的な流れの中でも重要なテーマのひとつであると考えます。

松島のコンパクト等質ケーラー多様体の分類に始まる等質ケーラー多様体の分類の問題が Dorfmeister・中島らによって決着して以来，等質擬ケーラー多様体・等質局所共形ケーラー多様体・等質四元数ケーラー多様体等への拡張の研究が最近盛んになって来ている。また，コンパクト等質多様体からより一般にコンパクト局所等質多様体に研究対象を拡張することは自然でかつ重要になって来ている。コンパクト局所等質ケーラー多様体の分類は主要な未解決問題のひとつです。一方，非コンパクトエルミート対称空間としての有界対象領域の研究は，擬エルミート対称空間，非対称・非有界等質領域等の研究への拡張が最近盛んになって来ている。「5．主な発表論文等〔雑誌論文〕1」においても，関連ある予想や問題についてその背景も含めて詳しく議論している。

## 2．研究の目的

「1. 研究開始当初の背景」に述べた研究動向を踏まえて，「等質多様体の複素幾何学」の研究分野において，さまざまな非ケーラー構造に関する分類の問題を中心に研究の進展を計る。より具体的には，等質複素多様体の分類問題として，「冪零リー群上の等質複素構造は複素ユークリッド空間に双正則である」の予想，「可解リー群上の擬ケーラー構造の分類(非有界な等質領域の分類)」，「可解リー群上の局所共形ケーラー構造の分類」等の研究がある。

## 3．研究の方法

研究の効率化のために様々な形で共同研究を行なう。海外からも研究者を招聘して国際的な研究会を開催し，研究を促進させる。

## 4．研究成果

研究代表者(長谷川敬三)は，実4次元コンパクト局所等質多様体上の複素構造はすべて局所等質であることを以前に示したが，「5．主な発表論文等〔雑誌論文〕2」において，実6次元コンパクト局所等質可解多様体上には等質でも局所等質でもない複素構造が入ることを示しました。また同じ論文において，複素3次元コンパクト可解多様体上の

擬ケーラー構造をすべて決定出来ました。これは研究分担者(山田拓身)の結果を拡張したものです。

研究代表者(長谷川敬三)は研究分担者(神島芳宣)とともに等質多様体上の局所共形ケーラー構造(LCK 構造)についての共同研究を続けています。主結果として得られた「コンパクト等質LCK多様体の構造定理」はVaismanによる「Lee形式が平行」の条件下での同結果を拡張したものです。また，4次元の場合のコンパクト局所等質LCK多様体の分類，および冪零型および簡約型のリー群上の等質LCK構造の決定等，今後の研究の土台になる基本的な結果を得ることが出来ました。プレプリントは「arXiv:1101.3693」としてアップロード，論文は現在投稿中です。さらに，非コンパクトの場合を含めた等質LCK構造について，D. Alekseevsky および V. Cortes と共に共同研究を続けています。特に，Vaisman型等質LCK多様体の決定問題，Lee形式から定義される捩れコホモロジーとVaisman条件との関連等，興味ある新しい研究課題にも取り組んでいます。

等質領域に関連する Cortes との共同研究として，有界対称領域から複素構造を代数的に少し変えることで非有界な非ケーラー等質領域が得られることの発見から発展的にその背景にある理論を探求しています。最近非常に関連のある研究が R. Penney の Koszul manifolds に関する論文でなされていることを知りました。この研究分野はまだ論文も数が少なく，等質領域を専門の研究分野としている研究分担者(伊師英之)とも協力を得てさらなる研究を続けています。

今後の研究の展望として，等質および局所等質空間上の局所共形ケーラー構造の非コンパクトの場合を含めた一般論，またコンパクト局所等質ケーラー多様体の決定問題の解決，非有界等質領域の擬エルミート構造の研究等，多くの興味ある研究課題が残されていて，今後の研究の進展を図る所存です。

本研究課題の「研究実施計画」に基づく主な研究活動として，研究分担者の神島芳宣氏・伊師英之氏・山田拓身氏および塚田和美氏の協力のもとで，国際研究集会「Lie 変換群と複素幾何学」(平成22年9月26日～29日，ホテルニューオータニ，新潟県湯沢町)を開催することが出来ました。この研究会において海外から D. Akhiezer, D. Alekseevsky, O. Baues および V. Cortes を迎えて，国際的な研究交流をはかりました。この研究会を通して本研究課題に関する研究がより活発になり研究者の連携の輪を広げることが出来

たと確信しています。また研究会のホームページをネット上に公開しました。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. H.Ishi, Unitary holomorphic multiplier representations over a homogeneous bounded domain, Adv. Pure Appl. Math. Vol. 2 (2011), 405-419.

2. K.Hasegawa, Small deformations and non-left-invariant complex structures on six-dimensional compact solvmanifolds, Differential Geometry and its Applications, Vol.28 (2010), 220-227.

3. Y.Kamishima, Pseudoharmonic maps and vector fields on CR manifolds, Jour. Math. Soc. Japan, Vol.62 (2010), 269-303.

4. Y.Kamishima, Degenerate conformal, CR, Quaternionic CR structure on Manifolds, Handbook of Pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry, V. Cortes (Ed.), Vol. 6 (2010), 863-896.

5. R. Kobayashi, Toward Nevanlinna-Galois theory for algebraic minimal surfaces, Riemann surfaces, harmonic maps and visualization, OCAMI Stud. Vol. 3 (2010), 129-136,

6. H.Ishi and T.Nomura, An irreducible homogeneous non-selfdual cone of arbitrary rank linearly isomorphic to the dual cone, Infinite Dimensional Harmonic Analysis IV, J. Hilgert et al. (Ed.), 129--134, World Scientific, Singapore, 2009.

7. H.Ishi, A torus subgroup of the isotropy group of a bounded homogeneous domain, Manuscripta Math. Vol.130(2009), 353-358.

8. K.Hasegawa, Complex and Kahler structures on compact homogeneous manifolds - their existence, classification and moduli problem, Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol.56 (2009), 151-168.

[学会発表](計5件)

1. K.Hasegawa, Locally conformally Kähler structures on homogeneous spaces, Geometric Structures on Complex Manifolds, 2011年10月, Steklov 研究所 (モスクワ). (招待講演)

2. Y.Kamishima, Lorentzian similarity manifolds, Cartan Connections, Geometry of Homogeneous Spaces and Dynamics, 2011年7月, ESI (ウィーン). (招待講演)

3. H. Ishi, On the Wallach set for a homogeneous bounded domain, Recent Developments in Harmonic Analysis and their Applications, 2011年4月, マラケシュ (モロッコ). (招待講演)

4. R. Kobayashi, Nevanlinna-Galois Theory of Algebraic Minimal Surfaces, Special Seminar, Chinese Academy of Sciences, 2010年6月, 北京. (招待講演)

5. K.Hasegawa, Complex geometric structures on Lie groups and their compact quotient spaces, 第13回多変数関数論葉山シンポジウム 2009年7月, 葉山. (招待講演)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕  
ホームページ等

国際研究集会「Lie変換群と複素幾何学」  
(Lie Transformation Groups and Complex  
Geometry):[http://math2.ed.niigata-u.ac.  
jp/symposium](http://math2.ed.niigata-u.ac.jp/symposium)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長谷川 敬三 (HASEGAWA KEIZO)  
新潟大学・人文社会・教育科学系・教授  
研究者番号：00208480

### (2) 研究分担者

神島 芳宣 (KAMISHIMA YOSHINOBU)  
首都大学東京・理工学研究科・教授  
研究者番号：10125304

### (3) 研究分担者

伊師 英之 (ISHI HIDEYUKI)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・  
准教授  
研究者番号：00326068

### (4) 連携研究者

山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)  
島根大学・総合理工学部・講師  
研究者番号：40403117

### (5) 連携研究者

小林 亮一 (KOBAYASHI RYOICHI)  
名古屋大学・多元数理科学研究科・  
教授  
研究者番号：20162034