様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年　6 月 10 日現在

機関番号：13601
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540074
研究課題名（和文）可微分Ｇ多様体の同型群とその応用

研究課題名（英文）Automorphism group of a smooth G-manifold and its applications.

研究代表者
阿部　孝順（ABE KOJUN）
信州大学・理学部・特任教授
研究者番号：30021231

研究成果の概要（和文）：
（１）　可微分 G-多様体 M に対して、コンパクトな台をもつ G 作用を保つ微分同相群、リプシッツ同相群および同相群を考察し、これらの恒等写像の連結成分のなす群について、1 次元ホモロジー群を考察した。特に M が余次元 1 軌道を持つ場合に 1 次元ホモロジー群を決定した。この結果から、同型群の 1 次元ホモロジー群が、カテゴリーの性質を良く反映することが分かる。
（２）　可微分多様体対に対してコンパクトな台をもつ微分同相群の恒等写像の連結成分のなす群の完全性と一様完全性を考察して、特に部分多様体が 1 次元の場合に一様完全となる条件を決定した。この結果は結び目理論にも応用される。

研究成果の概要（英文）：
（１）　Let M be a smooth G-manifold. We consider the diffeomorphisms, Lipschtz homeomorphisms and homeomorphisms of M preserving the G-action which are isotopic to the identity through the isotopies with compact support. We determined the first homology of those groups when M has codimension one orbits. From those results we see that the first homology reflects the properties of those categories.
（２）　We consider the perfectness and uniformly perfectness for the group of the identity component of the diffeomorphisms of a smooth manifold pair. We have determined the condition for the group to be uniformly perfect when the dimension of the submanifold is one. The result can be applied to the knot theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：微分トポロジー
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：微分同相群，群の完全性，１次元ホモロジー群，可微分 G－多様体，
一様完全性，同変微分同相群，可微分軌道体

１．研究開始当初の背景

M を可微分多様体として，D(M)をコンパクトな台をもつイソトピーにより，M の恒等写像とイソトピックな微分同相全体のなす群とする.Herman と Thurston は，D(M)が完全群であることを証明した.この結果が，葉層構造の分類空間の研究に寄与したことは，良く知られている.その後，多様体Mの種々の幾何学的構造を保つ同型群についても，多くの研究が行われている.この場合には，対応する同型群は一般的には完全群ではないが,その１次元ホモロジー群を求めることが,多様体の幾何学的性質を反映することから興味のある問題である.

当該の研究では，M がコンパクトリー群 G の可微分作用をもつ場合を 中心に考察する. D_G(M) をコンパクトな台をもつ同変イソトピーにより，M の恒等写像とイソトピックな同変微分同相全体のなす群とする. また多様体Mのリプシッツ同相群に，コンパクト開位相とコンパクトリプシッツ開位相の 2通りの位相を導入して，前者（後者）による位相の場合に， コンパクトな台をもつ同変イソトピーによりMの恒等写像とイソトピックな同変リプシッツ同相のなす群を L_G (M) (H_{LIP,G}(M))と表す。

研究開始当初までに当該研究に直接関連する研究結果は以下のようである。

（１） M がコンパクトリー群の自由作用をもつとき，D_G(M)は完全群である(Banyaga, Abe-Fukui)

（２） M が余次元１の軌道をもつ場合に, H_1(D_G(M))の構造を決定した(Abe-Fukui]).

（３） G が有限群の場合には H_1 (D_G(M))の構造を,また任意の可微分軌道体についても H_1 (D(M)) の構造を完全に決定した (Abe-Fukui)

（４） H_{LIP,G}(M)について，G が有限群の場合に完全群であることが分かった.

（５） L_G (M)は M が１つの軌道型をもつ場合は完全群であるが，一般的に H_1 (L_G(M))は，連続的モジュライをもつ (Abe-Fukui-Miura).

２．研究の目的

当該研究では次のことを目的とした。

（１） 余次元１軌道をもつ可微分 G-多様体に対して H_{LIP,G}(M)の構造を決定する。

（２） H_{HOM,G}(M)を可微分 G-多様体 M のコンパクトな台をもつ同変イソトピーにより,M の恒等写像とイソトピックな同変同相写像全体のなす群とする。このとき H_1(H_{HOM,G}(M)) の構造を決定する。

（３） 余次元２以上の軌道をもつ可微分 G-多様体について、H_1(D_G(M))の構造を調べる。

（４） 可微分多様体 M に対して、M の部分多様体 N を不変にするコンパクトな台をもつイソトピーにより M の恒等写像とイソトピックな微分同相全体のなす群を D(M,N)とする。このとき D(M,N)の一様完全性を調べる。

３．研究の方法

（１） 余次元１軌道をもつ可微分 G-多様体に対して、D_G(M)の場合は特異点の回りで微分を用いて同変微分同相の振る舞いを調べることができたが、リプシッツ同相については、新たな方法を見つけて同変リプシッツ同相の振る舞いを見つける必要がある。そのためにリプシッツ条件がどのように同変リプシッツ同相を制御するかを詳細に調べる。

（２） 同相群の群構造の研究は Mather により完全性が証明されている。また同変同相群に関しては、自由作用をもつ場合に Rybicki によりで完全性が証明された。余次元 1 軌道をもつ可微分 G-多様体に対して H_{HOM,G}(M)の構造を調べるには、同変同相の特異点の回りの振る舞いを調べることが問題となる。

（３） 余次元 2 以上の軌道をもつ G-多様体に対しては具体的な構造は特別な場合を除いて知られていない。ここでは、G がトーラスの場合から研究を行う。

（４） 微分同相群の一様完全性については、Burago-Ivanov-Polterovich および Tsuboi により研究が知られている。また Gamboudo-Ghys は quasi-homomorphism を用いて体積を保つ微分同相群について一様完全ではないことを証明した。ここでは、これらの結果や方法を用いて D(M,N)の一様完全性を調べる。

４．研究成果

研究期間に得られた成果は次のようである。

（１） V が余次元１軌道をもつコンパクトリー群の表現とする。このとき V の同変リプシッツ同相の原点の回りの振る舞いを制御する振動関数を構成することにより、H_{LIP,G}(V)は完全群であることを証明した。以前に得られた結果から L_G (V)は一般的に

完全群ではない。従って、これらの同型群の１次元ホモロジー群は、同変ﾘﾌﾟｼｯﾂ同相群の位相の違いを検出することが分かる。また一般的に余次元１軌道をもつ可微分 G-多様体について H_{LIP,G}(M)は完全群とはならないが、その１次元ホモロジー群を決定した。

（２） V が余次元１軌道をもつコンパクトリー群の表現とする。このとき数列を用いて、V の同変同相の原点の回りの振る舞いを制御する関数を構成して H_{HOM,G}(V)は完全群であることを証明した。この結果は先に得られた $D_G(V)$， H_{LIP,G}(V)，$L_G(V)$の結果と対照すると、これらの同型群の１次元ホモロジーが、カテゴリーの相違を表現していることが分かる。

（３） 可微分 G^多様体について M.Davis が構成した G-normal sysutem を参考にして、当該研究に符号する system を構成した。この system を用いて、M がトーラス多様体の場合 $H_1(D_G(M))$ $(G=T^r)$を決定した。

（４） 可微分多様体 M と次元が１以上の M の部分多様体 N に対して、D(M,N)が完全群であることを証明した。また D(M,N)が一様完全性を持つ十分条件を求めた。更に N の次元が１の場合に D(M,N)が一様完全群となる十分条件を quasi-homomorphism を構成して求めた。これらの結果は結び目理論について、応用することができる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① K. Abe: On the structure of the first homology group of equivariant diffeomorphisms of manifolds with smooth torus actions，数理解析研究所講究録，査読無，Vol 12,2011，pp91-102

② K. Abe:On the first homology of the automorphism groups of G-manifolds, Trend in Mathematics -New Series，査読無，Vol 12，2010，pp91-102.

③ 阿部 孝順：余次元１軌道をもつG-多様体の同変部分群の１次元ホモロジー，京都大学数理解析研究所講究録，査読無，Vol 1670，2009，91-99.

④ K. Abe and K.Fukui：Commutators of C^{∞}-diffeomorphisms preserving a submanifold，Jour. Math. Soc. Japan，査読有，Vol 61，2009，pp427-436.

〔学会発表〕（計 12 件）

① K. Abe：Uniform perfectness of diffeo-morphism groups，I，II，Geometric Topology Seminar，2011 年 11 月 21 日，Max Planck Institute for Mathematics.

② K. Abe and K.Fukui：On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold，多様体の平面場と微分同相群2011研究集会，2011年11月4日，東京大学玉原国際セミナーハウス

③ K. Abe and K.Fukui：On the uniform perfectness of diffeomorphism groups preserving a submanifold，尾鷲微分トポロジー2011，2011 年 8 月 23 日，尾鷲中央公民館

④ K. Abe and K.Fukui：On the uniform perfectness of diffeomorphisms preserving a submanifold，変換群の幾何と組合せ論，2011 年 6 月 13 日，京都大学数理解析研究所

⑤ K. Abe：On the first homology of the group of equivariant diffeomorphis msof smooth S^1-manifolds，Group Actions in Topology and Analysis The Fourth Group Action Forum Conference，2010年9月16日，University of Milano-Bicocca

⑥ K. Abe：On the structure of the first homology of the group of equivariant diffeomorphisms of manifolds with smooth torus actions，変換群と手術理論，2010年8月11日，京都大学数理解析研究所

⑦ K. Abe：On the first homology group of diffeomor- phisms of smooth orbifolds and its applications，Workshop on Toric Topology and Related Topics，2010 年 5 月 5 日，Fudan University

⑧ K. Abe：On the first homology of automorphism groups of G-manifolds，KAIST Toric Topology Workshop，2010 年 2 月 26 日，KAIST

⑨ K. Abe：The first homology of automorphism group of G-manifolds，多様体の微分同相群，2009 年 10 月 28 日，東京大学玉原セミナーハウス

⑩ K. Abe：The first homology of the group of equivariant diffeomorphisms and its application，Hajos Geometria szeninariuum，2009年9月11日，Eotovos Lorand Univrsity

⑪ K. Abe: On the first homology of the automorphism groups of G-manifolds, Group Actions and Homogeneous Spaces 2009年9月7日, コメニウス大学
⑫ 阿部 孝順:同変同相群の構造, 変換群の幾何とその周辺, 2009年8月19日, 京都大学数理解析研究所

〔その他〕
ホームページ等
http://math.shinshu-u.ac.jp/~kabe/index-j.html

6．研究組織
(1)研究代表者
阿部　孝順　(ABE KOJUN)
信州大学・理学部・特任教授
研究者番号：30021231