

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540076
 研究課題名（和文）
 接触幾何とシュワルツおよびツイスター理論による非可換偏微分方程式論の構築
 研究課題名（英文）Construction of theory of non-commutative partial differential equations by Schwarzian and twistor methods
 研究代表者
 佐藤 肇 (SATO HAJIME)
 名古屋大学・多元数理科学研究科・名誉教授
 研究者番号：30011612

研究成果の概要（和文）：CR 構造の接触形式を固定したプシュードハーミッシェン幾何学の、基本線形微分方程式系を決定し、この方程式系の可積分条件が、プシュードハーミッシェン構造の田中-ウェブスター接続の捩率と曲率の両方の消滅条件と一致することを示した。また、一つのルートに対応する部分群により定まるリー・テンソル積構造は、放物幾何学の基本構成分子となるものであるが、その上での解析の基礎となる接続を確定した。

研究成果の概要（英文）：We decide the fundamental system of linear differential equations for pseudo-hermitian structures which are given by fixing a contact form of a CR-manifold. The integrability condition of the system coincides with the vanishing of the torsion and the curvature of the Tanaka-Webster connection. The Lie tensor product structure defined by one root is fundamental element of parabolic geometry. We give the connection of the structure for the basis of the analysis.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：シュワルツ微分，放物幾何，リー構造

1. 研究開始当初の背景

微分方程式系の幾何学的研究は、今からおおよそ130年前に、ノルウェーの数学者リーにより創始されたが、その後、グルサ、ダルブー、カルタンなどにより、微分形式による方法により飛躍的發展をとげた。この微分形式の方法は、局所的な計算を展開するのみならず、座標を直接には用いないゆえに、大域的な問題も同時に考えることを可能にしている。しかしながら、その概念の中には、現代数学においてもまだ十分には理解されてはいないものも、発展の余地のあるものも

含まれており、さらなる整備による進歩が待たれているといった状況であった。

研究代表者は、吉川敦子との共同研究で3階の常微分方程式の接触同相による分類問題をカルタンによる動標構の方法で田中昇の理論を用いて完全に解決した。その結果は次のものである。

3階の常微分方程式が二次関数を解とする自明な方程式に1次ジェット空間の接触同相で移る条件は、方程式を定める関数が、2階微分の3次以下の関数であり、各次数項の係数である4つの関数 P, Q, R, S は、平坦条

件と呼ばれる4つの偏微分方程式系を満たしているときである。

3次元接触空間の接触同相 f は4つの関数 P, Q, R, S を定義するが、それらは、 f の2階までの偏導関数達の有理関数で表される。これは、平面の正則変換から定められる高次のシュワルツ微分と（可換なベクトル場による2次の微分を非可換なベクトル場によるものとするという対応で）形が同じであり、接触同相のシュワルツ微分と呼ぶことができる。シュワルツ微分が全て消えていけば、その接触同相は線形射影接触同相であるということが従う。高次のシュワルツ微分は、それを係数とする線形偏微分方程式系を与えることができ、シュワルツ微分の偏微分方程式による平坦条件がその線形偏微分方程式系の可積分条件となり、解達の射影化により、シュワルツ微分を与えた正則変換が再生される。さらに係数に特異点を考えることにより、有用な超幾何微分方程式系を構成するというのが、シュワルツ・プログラムと呼ばれているものである。

研究代表者は、連携研究者小沢哲也との共同研究で、シュワルツ微分が係数となる線形偏微分方程式系を、非可換な二つのベクトル場（ハイゼンベルグ群不変性をもつ）による偏微分方程式系として定め、その微分方程式系の積分可能条件が、まさしく平坦条件と一致することを示した。その解全体の空間には、シンプレクティック構造が入り、その包含的元から、元の接触写像が再現されることもわかった。このように、解から接触変換を作り出すような方程式系は、いままでの可換な偏微分方程式論では不可能なことなので、新しい非可換偏微分方程式論のはじまりとなると考えられた。

2. 研究の目的

古典的な高次のシュワルツ微分は、それを係数とする線形偏微分方程式系を与えることができ、シュワルツ微分の偏微分方程式による平坦条件がその線形偏微分方程式系の可積分条件となり、解達の射影化により、シュワルツ微分を与えた正則変換が再生される。さらにシュワルツ微分による係数に特異点を与えることにより、有用な超幾何微分方程式系を構成するというのが、シュワルツ・プログラムと呼ばれているものである。研究の目的は、これを接触幾何の分野の中で、物理への応用をふまえて、さまざまな幾何構造に対して完成し、冪零な構造への一般論に拡張して、それらを、配置空間の一意化問題などに応用するのが目的である。経済学での効用理論を支配するウェブの理論にも関連することがわかってきたので、社会科学への応用も可能と思われる。

3. 研究の方法

幾何学的同値問題の研究に有効であると信じられているが、その難解さ故、まだ一般の数学者が使いきれてはいない方法として、微分形式を使うカルタンの動標構の理論がある。階数付きリー代数と調和積分理論を用いてカルタンの理論の現代的再構成を与えたのが、田中昇の正規接続の理論である。これは、単純リー代数に対して統一的方法であるから、等方群の異なる放物型幾何どうし間の接続のツイスター対応を明示することも可能であり、いまだ解明の進んでいない幾何構造の研究にも非常に有効なものであると考えられる。田中理論の基本定理は次のようなものである。

定理. 実数体上の単純階数付きリー代数 g がスペンサー・コホモロジーの消滅条件を満たしているとする。多様体 M 上に g の負の階数部分をモデルとする幾何構造が与えられたとき、 M 上に主束 P とその上の g 値の1次微分形式である正規カルタン接続が存在して、 M 上の幾何構造の同型類と正規カルタン接続の接続同型類が1対1に対応する。

スペンサー・コホモロジーの消滅条件は具体的に計算され、沢山のもがこの条件を満足していることがわかっている。

4. 研究成果

具体的には次のような結果が得られた。

(1) 複素多様体内の擬凸な領域の境界をモデルとした重要な幾何構造としてコーシー・リーマン構造があり、単にCR構造と呼ばれる。CR構造は、接触分布とその分布上での積分可能な複素構造により定義される。接触分布は、接触形式を零化するものであり、接触形式を非零関数倍した接触形式は、同じ接触構造を与える。CR構造の接触形式をひとつ固定した構造をプシュードハーミッシェン構造、ここではPH構造と省略する。PH構造はCR構造の基本的な下部構造であり、単一な田中-ウェブスター接続が入る。この接続の振率と曲率の消滅が、PH構造が平坦なものPH同型になるための条件となる。このPH同型の具体的な構成は接続から直接作られるわけではなく、別の議論が必要である。研究代表者は連携研究者の小沢哲也との共同研究で次のような線形微分方程式系を構成した。

3次元PH構造は、局所的に平坦構造との複素構造の違いを表す複素関数 σ と接触形式の違いを表す実関数 τ により表現される。このとき、 σ を用いて表現されるハイゼンベルグ余微分場と τ によって表される2本の2階線形微分方程式系を構成することが出来た。この方程式系 (F) は3次元PH構造の基本線形微分方程式系と呼ばれるべきもので、次の

性質を持つ。

① σ と τ の定める PH 構造の振率と曲率が消滅していれば、線形微分方程式系 (F) は可積分である。

① (F) が可積分ならば、その 3 つの基本解系を並べて射影化したものは、平坦構造からの PH 同型写像を与えるものとなる。

(2) 放物幾何は、単純リー群の正の単純ルートの部分集合により、対応する放物型部分群による商空間をモデルとして定義される。この部分集合が、ただ 1 つの単純ルートのみの場合の場合がすべての放物幾何の基本構成因子であるから、基本放物幾何と呼ぶことにする。リー代数が古典型の場合は、A 型は、グラスマン構造、テンソル積構造など、いろいろな名前がつけられて、いくつかの研究があるが、B, C, D 型は、重要でありながら、ほとんど研究がなかった。研究代表者は山口佳三との共同研究でそれらを詳しく調べた。

① B, D 型. この放物型幾何構造は、接空間が、1 つの線形空間と他の非退化な内積を持つ線形空間のテンソル積の構造を持つ部分束をもち、その部分束は、一般型の接触構造を満たす 1 次微分形式で定まっているものと定義される。これは、リーの球面接触幾何をモデルにして以前に定義したリー接触多様体の一般化にもなっており、リー・テンソル距離構造と名づけることにした。

② C 型. この放物型幾何構造は、接空間が、1 つの線形空間と他のシンプレクティック形式の定まった線形空間のテンソル積の構造を持つ部分束をもち、その部分束は、一般型の接触構造を満たす 1 次微分形式で定まっているものと定義される。この構造をリー・テンソル・シンプレクティック構造と名づけた。

③ B, C, D 型すべての場合に田中理論が適用できて、これらは有限型の幾何構造であることがわかり、枠束の延長が有限で終わって、多様体上に同型を除いて単一な主束とカルタン接続が構成される。この曲率の消滅が幾何構造の平坦条件となる。

(3) 多様体が d 個の互いに横断的な葉層を持つとき、 d -織物という。接触多様体の d -織物のすべての葉が、接触構造のルジャンドル部分多様体になっているとき、ルジャンドル d -織物という。接触多様体の次元が 3 の場合を考える。このとき、葉の次元が 1 で接方向が接触分布に含まれているのが、ルジャンドル織物の条件である。3 次元接触多様体には、局所的にレーブ場による商空間への射影が存在する。葉であるすべてのルジャンドル曲線が線形るとき、線形ルジャンドル織物といい、線形ルジャンドル織物と局所的な接触織物微分同相が存在するとき、ルジャンドル

d -織物を線形化可能であるという。平面上の d -織物が線形化可能であるとき、その線形化微分同相写像は、局所的に線形変換を除いて一意のかというのが、グロンオールによる織物理論の基本予想である。平面上でのこの予想は $d=3$ の場合は未解決であるが、 $d \geq 4$ の場合に エノーは古典的な トレッセ-カルタンの 2 階常微分方程式の線形化の理論を応用して、肯定的に解決した、研究代表者は連携研究者の小沢哲也との共同研究で、すでに 3 階常微分方程式の線形化の理論を完成していた。これを応用すると、 $d \geq 4$ の場合にはルジャンドル d -織物のグロンオールによる予想を肯定的に解決することが出来た。すなわち次の定理を得た。

定理. $d \geq 4$ とする。ルジャンドル d -織物が線形化可能ならば、その線形化は射影接触変換を除いて単一である。

冪零幾何学の中では、半単純リー群の放物型部分群による商空間をモデルとする放物幾何が基本的であるが、その中でも、一つのルートに対応する部分群により定まる構造が最小の構成分子となる。本研究で、この幾何学的構造をリー・テンソル積構造と名付けて、その上での解析の基礎となる接続を確定した。従って、この接続の変化を与えるシュワルツ微分を定義することが可能となった。局所微分同相に対する具体的なシュワルツ微分の表現が次の課題として残っている。

また、3 階の常微分方程式の同値問題の結果を応用して、3 次元接触多様体上のルジャンドル d -織物に対しての、線形化写像の一意性に関するグロンオール予想の証明を得た。さらに次元を一般化して研究することが問題となるが、ルジャンドル d -織物の最高階数の有限性とその数の決定が最初の基本的問題となる。 $d=3$ の場合でも、一般次元の場合の結果は知られてはいないが、連携研究者と共同の研究で、少しずつ最高階数の決定の問題が解明しつつある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① Hajime Sato and Keizo Yamaguchi,
Lie tensor product manifolds,

To appear in Demonstratio Mathematica,
2012, 査読有

② Shuntaro Ohno, Tetsuya Ozawa and

Masaaki Umehara;

Closed planar curves without inflections,
Proc. of the AMS. S 0002_9939, 2012,
11319_X, Electronically published, 査読有

③ Tetsuya Ozawa and Hajime Sato,
Construction of equivalence maps in Pseudo
- Hermitian geometry via linear differ-
ential equations, Kodai Math J., 34, 2011,
105-123, 査読有, 10. 2996/kmj/1301576765

[学会発表] (計 16 件)

- ① 佐藤 肇, 微分式と幾何構造, 第 35 回ト
ポロジーセミナー, 2012 年 3 月 16 日,
たてやま夕日海岸ホテル
- ② 佐藤 肇, Legendre Web の rank 問題, 複
素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺,
2011 年 12 月 10 日, 龍谷大学セミナーハウ
スともいき荘
- ③ 佐藤 肇, ジェット束のメタシンプレク
ティック構造の等方空間, シンプレクティ
ック幾何学とその周辺, 2011 年 11 月 11
日, 岐阜経済大学
- ④ 佐藤 肇, シンプレクティック織物とサ
ミュエルソン条件, 尾鷲微分トポロジー
2011, 2011 年 8 月 25 日, 尾鷲中央公民館
- ⑤ 佐藤 肇, 偏微分方程式系の解の特異点,
特異点論とその応用, 2011 年 6 月 1 日, 大
分工業高等専門学校
- ⑥ 佐藤 肇, 微分方程式の特性系のはなし,
接触構造・特異点・微分方程式およびその
周辺, 2011 年 1 月 22 日, 京都市職員会館
かもがわ
- ⑦ 佐藤 肇, Web, Nomograph と Gronwall 予
想, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とそ
の周辺, 2010 年 11 月 26 日, 龍谷大学セミ
ナーハウスともいき荘
- ⑧ 佐藤 肇, ラグランジュ織物とルジャン
ドル織物, シンプレクティック幾何学とそ
の周辺, 2010 年 11 月 16 日, 放送大学秋
田学習センター
- ⑨ Hajime Sato, Contact path geometry,
Legendrian webs and Gronwall conjecture,
Parabolic Geometries and Related Topics,
2010 年 11 月 5 日, Tambara Institute of
Mathematical Sciences
- ⑩ 佐藤 肇, Linearization and Gronwall

conjecture of Legendrian webs, Geometry
and Something, 2010 年 10 月 11 日, 福
岡大学

- ⑪ 佐藤 肇, Legendre Web と Gronwall 予想,
広島幾何学研究集会 2010, 2010 年 10 月 7
日, 広島大学
- ⑫ 佐藤 肇, Legendre ウェブと効用理論,
尾鷲微分トポロジー2010, 2010 年 8 月 26
日, 尾鷲中央公民館
- ⑬ 佐藤 肇, 3 次元擬エルミート構造の基本
微分方程式, 接触構造・特異点・微分方程
式およびその周辺, 2010 年 1 月 28 日, 洞
爺湖文化センター
- ⑭ 佐藤 肇, Lie Tensor Contact Manifolds,
Symplectic Geometry とその周辺, 2009 年
11 月 25 日, 岐阜経済大学
- ⑮ 佐藤 肇, 手術理論などの初期の微分位
相幾何と微分同相群の非有限性, 山代微分ト
ポロジー, 2009 年 8 月 21 日, 山代地区会館
- ⑯ Hajime Sato, Geometric structure on the
space of singular curves, Polish-Japanese
Singularity Theory Working Days, 2009 年
7 月 14 日, Kazimierz Dolny, Poland

[図書] (計 1 件)

- ① 佐藤 肇・一楽重雄, 日本評論社,
第 3 版 幾何の魔術, 2012, 156

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 肇 (SATO HAJIME)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究
科・名誉教授

研究者番号 : 30011612

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

小沢 哲也 (OZAWA TETSUYA)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号 : 20169288

鈴木 浩志 (SUZUKI HIROSHI)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究
科・准教授

研究者番号 : 70235993