

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月27日現在

機関番号：14401
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540080
 研究課題名（和文）等質アインシュタイン多様体の研究

研究課題名（英文）Homogeneous Einstein manifolds

研究代表者
 坂根 由昌（SKANE YUSUKE）
 大阪大学・名誉教授
 研究者番号：00089872

研究成果の概要（和文）：一般化された旗多様体に関して、等方部分群により4つの既約成分に分解される場合に、等質なアインシュタイン計量をすべて決定した。また、5、6個の既約成分に分解される場合のいくつかの一般化された旗多様体についても、非ケーラーな等質アインシュタイン計量が存在することを示した。次数付き半単純リー環のパラボリック・リー部分環に対応してできる巾零部分群を拡張してできる可解リー群、すべてに、アインシュタイン計量が存在すること示した。リッチ平坦なコンパクト擬ケーラー可解多様体を多く構成した。

研究成果の概要（英文）：For generalized flag manifolds, we completely classified homogeneous Einstein metrics in case that these have four isotropy summands. Moreover, in the cases when generalized flag manifolds have five or six isotropy summands, we obtain the existence of non-Kähler Einstein metrics on these spaces. For solvable Lie groups which are obtained by the extensions of nilpotent Lie subgroups corresponding to the parabolic Lie subalgebras of graded semi-simple Lie groups, we have proved that there exist always Einstein metrics. We also constructed many compact pseudo-Kähler solvmanifolds with flat Ricci tensor.

交付決定額

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：等質アインシュタイン計量、一般化された旗多様体、リー群上の左不変リーマン計量、アインシュタイン可解多様体、擬ケーラー計量、コンパクトリー群上のアインシュタイン計量

1. 研究開始当初の背景
 等質空間上の等質なアインシュタイン計量の研究は、リッチテンソルの符号により3つの場合に分かれる。すなわち、リッチテンソルが正の場合、0の場合、負の場合である。(1)リッチテンソルが正の場合、等質空間はコンパクトで基本群は有限となることが知

られている。Wang-Ziller は、等質なアインシュタイン計量の存在しない12次元の等質空間をみつけた。一方、低次元の等質空間等質なアインシュタイン計量が存在するかという問題は、Nikonorov-Rodionov, Böhm-Kerr らにより考察され、2006年にBöhm-Kerrにより、11次元以下のコンパ

クト単連結等質空間には、等質なアインシュタイン計量が存在することが示された。また、群を固定したときの等質空間上の等質なアインシュタイン計量をすべて求めよという問題は、2003年に Nikonorov-Rodionov により7次元以下のコンパクト等質空間に対しては、3次元球面の2つの直積を除いて、等質なアインシュタイン計量がすべて決定されている。また、Böhm-Wang-Ziller は等質空間上の等質なアインシュタイン計量のモデュライ空間の連結成分は有限で、各連結成分はコンパクトであることを示した。さらに、群のランクとその等方部分群のランクが等しくなるような等質空間上の等質なアインシュタイン計量は有限個であるという予想をたてている。一方、2次元球面と3次元以上の奇数次元球面の直積には、無限個の同値でない推移的な群作用が存在し、各作用は等質な体積1のアインシュタイン計量の一つのみ許容し、さらに、アインシュタイン定数は0に収束することを示した。また、コンパクト・リー群上の左不変なリーマン計量に関して、1979年に D'Atri-Ziller は、いつ計量はナチュラルイ・レダクティブになるかを調べ、多くのナチュラルイ・レダクティブな等質なアインシュタイン計量を見いだした。また、ナチュラルイ・レダクティブでないアインシュタイン計量は存在するかという問題を提出している。

(2) Alekseevsky-Kimelfeld の定理により、リッチテンソルが0の場合はリーマン計量は平坦になることが知られている。しかし、擬リーマン計量に関しては、リッチ平坦擬リーマン計量をもつ平坦でない可解リー群が存在することが知られている。

(3) リッチテンソルが負の場合、作用するリー群は非コンパクトとなるが、今までに知られている非コンパクト等質空間上の左不変なアインシュタイン計量はすべて可解リー群上の左不変計量としてあらわされる。非コンパクト対称空間はこれの最も古典的な場合であるが、これ以外の初めて例は、1985年に Boggino により見いだされた。これは、ハイゼンベルグ型の2階の巾零リー環を1次元拡張して得られる可解リー環に計量をいれたものとして構成された。一方、1998年に Heber は可解リー群上のアインシュタイン計量について重要な研究をしている。その一つとして可解リー群上の標準的左不変計量の中で、アインシュタイン計量は存在すれば一意的であることを証明している。最近、Lauret は可解リー環に左不変アインシュタイン計量が存在すれば標準的であることを証明した。

2. 研究の目的

(1) リッチテンソルが正の場合、群のランクが

等しくなるような等質空間の例としては、一般化された旗多様体がある。この等質空間には、ケーラー・アインシュタイン計量が存在することが知られている。この空間の等質なアインシュタイン計量をすべて求められるかを研究する。これに関しては、研究代表者および海外共同研究者 Arvanitoyeorgos らによっていくつかの研究がなされている。また、コンパクト・リー群上の左不変なアインシュタイン計量で、ナチュラルイ・レダクティブでないものの存在は、森邦彦による研究以外には知られていないので存在するかを研究する。

(2) 擬ケーラー計量に関して、リッチテンソルが0であるものを構成し、幾何学的性質を考察する。

(3) リッチテンソルが負の場合、森邦彦は Boggino の例を拡張したものとして、巾零リー環から可解リー環を構成するのに用いる微分の比が1:2となっている空間で、次数付き半単純リー環のパラボリックリー部分環に対応してできる巾零部分環が2階の巾零環である場合を用いて、負の断面曲率をもつアインシュタイン空間の例を構成した。これを一般のパラボリックリー部分環に対応してできる巾零部分環を拡張してできるすべての可解リー群に対して、アインシュタイン計量が存在するかを研究する。

3. 研究の方法

(1) 一般化された旗多様体上の不変なリーマン計量は、等方部分群による既約分解の既約成分の数でパラメータ化される。このパラメータを用いて、等質な計量のリッチテンソルの成分を具体的に計算する。Wang-Ziller によるリッチテンソルの成分の記法を用いる。リッチテンソルの成分は完全に決定するために、ケーラー・アインシュタイン計量とリーマンサブマーシオンを用いる。等質なアインシュタイン計量となる条件は、多変数の代数方程式に正の解があることと同値である。多変数の代数方程式の解を探すためにグレブナー基底を計算する。さらに、正の解があるかを研究する。また、コンパクト・リー群上の左不変なアインシュタイン計量で、ナチュラルイ・レダクティブでないものの存在を示すために、コンパクト・リー群を一般化された旗多様体上ファイバー束として考察する。

(2) コンパクト擬ケーラー可解多様体でトラス以外のものを構成し、これらの曲率を計算する。コンパクト擬ケーラー多様体のリッチ形式とリッチ曲率の関係を調べる。

(3) 可解リー群上の標準的左不変計量を持つものに対して、部分多様体論を用いて、リッチテンソルを比較して計算するという方法によりアインシュタイン計量の存在を研究

する。また、リー群上の左不変計量のなす空間を研究する。

4. 研究成果

(1) 一般化された旗多様体上の等質なアインシュタイン計量研究に関して、等方部分群により4つの既約成分に分解される場合が、Arvanitoyeorgos と Chrysikos により2009年に詳しく研究されたが、この中で、等質空間 $SO(2n)/U(p) \times U(n-p)$, $Sp(n)/U(p) \times U(n-p)$ については、あまり研究されていなかった。これらについて、等長変換を除いて、すべての等質なアインシュタイン計量を決定することができた。これにより、一般化された旗多様体で4つ以下の既約成分に分解される場合の等質なアインシュタイン計量がすべて決定された。この場合のアインシュタイン方程式はパラメータを含む多変数の代数方程式になり、これに正の解があることを示した。

(2) 例外群 G_2 の旗多様体上の等質なアインシュタイン計量をすべて決定することができた。これは、6つの既約成分に分解される場合の例になっている。また、これは、例外群の旗多様体に対して、ケーラー・アインシュタイン計量以外のアインシュタイン計量が存在する初めて例である。

(3) 一般化された旗多様体

$Sp(n)/(U(p) \times U(q) \times Sp(n-p-q))$ 上の等質なアインシュタイン計量に関して、リーマンサブマージョンを用いることにより、計量の比較を行い、ケーラー・アインシュタイン計量と合わせることにより、この場合のリッチテンソルの成分を完全に決定した。また、 $n=3, 4$ のとき、等質なアインシュタイン計量を完全に決定した。この場合は、6つの既約成分に分解される例になっている。

(4) 一般化された旗多様体が等方部分群により5つの既約成分に分解される場合を研究し、等長変換を除いて、4系列が存在することがわかった。これらについて、等質なアインシュタイン計量の存在を研究した。この場合にも、リーマンサブマージョンを用いることにより計量の比較を行う方法、およびケーラー・アインシュタイン計量を用いる方法が、アインシュタイン方程式の完全な決定に役立っている。

(5) 一般化された旗多様体が等方部分群により2つの既約成分に分解される場合を用いて、コンパクト・リー群上の左不変なアインシュタイン計量で、ナチュラリイ・レダクティブでないものが存在することを示した。これにより、1979年にD'Atri-Zillerにより提出された問題が解決された。

(6) コンパクト擬ケーラー可解多様体の曲率に関して、擬ケーラー計量が左不変でなくても等方部分群が離散的であれば、コンパクト擬ケーラー可解多様体の曲率はすべてリ

ッチ平坦であることを示した。

(7) 曲率平坦不変な擬リーマン計量をもつ可解多様体の構成法を発見し、リッチ平坦擬リーマン計量をもつ可解リー群を多く構成した。

(8) 一般のコンパクト擬ケーラー多様体において、リッチ形式とリッチ曲率が計量の指数に関する定数倍を除いてケーラー多様体と同様の関係が成り立つことを示した。これにより、擬ケーラー多様体において、擬ケーラー・アインシュタイン計量の存在は不定値型のモンジュ・アンペール方程式を解くことに帰着されることになる。

(9) リー群上の左不変計量の成す空間について研究を行った。特に、そのような空間が1次元となるリー群の例を構成した。これらのリー群は、今後の研究の基本的な例となると考えられる。

(10) 非コンパクト型対称空間へのコホモジニティ1の作用の研究に関して、数多くの新しい例を構成すると共に、いくつかの空間へのコホモジニティ1作用の分類を得た。

(11) 次数付き半単純リー環のパラボリックリー部分環に対応してできる巾零部分環を拡張してできる可解リー群、すべてに、アインシュタイン計量が存在すること示した。これは、森による例を含む一般的な結果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件:すべて査読有)

1. A. Arvanitoyeorgos, K. Mori and Y. Sakane, Einstein metrics on compact Lie groups which are not naturally reductive, *Geom. Dedicata* (2012)

DOI: 10.1007/s10711-011-9681-1, 1-25

2. T. Yamada, Ricci flatness of certain compact pseudo-Kähler solvmanifolds, *J. Geom. Phys.* 62 (2012) 1338-1345

3. T. Yamada, Holomorphic vector fields of compact pseudo-Kähler manifolds, *J. Geom. Phys.* 62 (2012) 740-750

4. A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, Homogeneous Einstein Metrics on Generalized Flag Manifolds $Sp(n)/(U(p) \times U(n-q))$, *Diff. Geom. Appl.* 29 (2011) S16-S27

5. H. Tamaru, Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, *Math. Ann.* 351 (2011) 51-66

6. A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, Complete description of invariant Einstein metrics on the generalized flag manifold $SO(2n)/U(p) \times U(n-p)$, *Ann. Glob. Anal. Geom.* 38 (2010) 413-438

〔学会発表〕(計14件)

1. 坂根由昌, Recent progress on homogeneous Einstein metrics on generalized flag manifolds, 松江微分幾何学研究会 2011, 島根大学, 2011年12月17日
2. 山田拓身, Some studies on compact non-Kaehler manifolds, 松江微分幾何学研究会 2011, 島根大学, 2011年12月17日
3. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and submanifold geometry, DFG-JSPS Seminar "Lie Groups: Geometry and Analysis", Paderborn (ドイツ), 2011年9月9日
4. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups and geometry of noncompact homogeneous spaces, Tsinghua University Seminar, Tsinghua University (中国), 2011年8月18日
5. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups and geometry of solvable Lie groups, 10th Panhellenic Geometry Conference, Patras (ギリシャ), 2011年5月28日
6. Hiroshi Tamaru, Parabolic subgroups and submanifold geometry of noncompact symmetric spaces, Mini International Workshop on Geometry of Symmetric Spaces and Related Fields, Kyungpook National University (韓国), 2011年4月14日
7. 坂根由昌, 一般化された旗多様体上の等質アインシュタイン計量, 第18回 沼津研究会-幾何, 数理論理, そして量子論-, 沼津工業高等専門学校, 2011年3月8日
8. 坂根由昌, Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds, 松江微分幾何学研究集会 2010, 島根大学, 2010年12月11日
9. 山田拓身, コンパクト擬ケーラー多様体の正則ベクトル場について, 松江微分幾何学研究集会 2010, 島根大学, 2010年12月11日
10. 田丸博士, 非コンパクト対称空間への良い作用の構成法, 研究集会「部分多様体幾何とリー群作用」, 東京理科大学, 2010年9月8日
11. Yusuke Sakane, Invariant Einstein metrics on generalized flag manifolds, 2nd meeting ICDG 2010, Univ. of Veliko Tarnovo (ブルガリア), 2010年9月7日
12. Hiroshi Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type (II), Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems, 東北大学, 2010年8月26日
13. Hiroshi Tamaru, Canonical extensions of isometric actions on noncompact symmetric spaces, Submanifold Geometry and Lie Group Theory, 大阪市立大学, 2009年

11月1日

14. 田丸博士, リー群の左不変計量の成す空間について, 第56回幾何学シンポジウム, 佐賀大学, 2009年8月29日

〔図書〕(計1件)

1. A. Arvanitoyeorgos, I. Chrysikos and Y. Sakane, World Scientific Pub. Co., Recent Progress in Differential Geometry and Its Related Fields, Proceedings of the 2nd International Colloquium on Differential Geometry and Its Related Fields, Chapter 1 Homogeneous Einstein Metrics on Generalized Flag Manifolds $Sp(n)/(U(p) \times U(q) \times Sp(n-p-q))$ (2011) 1-24

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂根 由昌 (SAKANE YUSUKE)
大阪大学・名誉教授
研究者番号: 00089872

(2) 研究分担者

田丸 博士 (TAMARU HIROSHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 50306982
山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)
島根大学・総合理工学部・講師
研究者番号: 40403117

(3) 連携研究者