

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 21 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2012

課題番号：21540082

研究課題名（和文） Heegaard 理論の展開と応用

研究課題名（英文） On developments and applications of Heegaard theory

研究代表者 小林 毅（KOBAYASHI TSUYOSHI）

奈良女子大学・自然科学系・教授

研究者番号：00186751

研究成果の概要（和文）：

本研究では 三次元空間の一般化である三次元多様体の Heegaard 分解に対して (1) 本質的 lamination に対する Haken 型の定理, (2) 任意の自然数 n に対して距離がちょうど n になる Heegaard 分解の存在, を示すことができた. また低次元トポロジーの応用として (3) 2次元トーラス上の相似構造を用いた, 一般化されたミウラ折りの構成, という結果が得られた.

研究成果の概要（英文）：

In this research we first proved the following two results for Heegaard splitting of 3-manifold which is a generalization of 3-dimensional space: (1) Haken type theorem for essential laminations, and (2) existence of Heegaard splitting of distance n for each positive integer n . Then as an application of low dimensional topology, we gave: (3) a construction of generalized Miura map folding by using similarity structure on 2-dimensional torus.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：三次元多様体, Heegaard 分解, 距離, ミウラ折り

1. 研究開始当初の背景

Hempel によって導入された (Topology 40 (2001), no. 3, 631–657) Heegaard 分解の “距離” の概念は, その三次元多様体の持つ固有の複雑さ (例えば三次元多様体内の本質的曲面の種数, 三次元多様体内の同値でない Heegaard 分解の種数, 同じ結び目の連結輪の反復に関するトンネル数の超加法性が成り立たなくなる反復連結和の数) を良く反映し

ていることが明らかになっている. この方向の研究として例えば Scharlemann–Tomova (Geom. Topol. 10 (2006), 593–617) は三次元多様体 M の最小種数 Heegaard 分解 S の距離が $2g(S)+1$ 以上ならば M 内の既約な Heegaard 分解は 1 種類しか存在しないこと, 即ちその三次元多様体の Heegaard 分解に関してある種の剛体性が成り立つことを示している. これはしばらく前までは予想もできなかった驚異的な結果であると申請者は考

えている．ところで2008年に三次元多様体論 Heegaard 分解の安定種数に関する長年の懸案：

同じ三次元多様体の二つの同値でない Heegaard 分解が与えられたとき，それらは種数を g, g' ($g \leq g'$) とするなら，それぞれの Heegaard 分解を種数 $g' + 1$ まで安定化したものは同値になる

が Thurston-Hass-Thompson, Johnson, Bachman によって独立に否定的に解決された．ここでも Hempel の距離が本質的な役割を果たしているのだが，面白いことにこの三つの結果で用いられた技巧は全く異なるものであった．(Thurston-Hass-Thompson は negatively curved な多様体への調和写像，Johnson は三次元多様体の Rubinstein-Scharlemann graphic, Bachman は critical Heegaard surface の理論を用いる．) “良い問題” とは，様々な数学の思いがけない接点になることが多いが，その意味でもこの安定化種数に関する問題は良い問題と言えるであろう．このような Heegaard 理論の発展を見ているとここで発見された様々な分野のつながりは三次元多様体の位相構造の解明にまだまだ数多くの強力な証明の手法を提供できる可能性や，逆に三次元多様体論における諸結果を幾何的トポロジーやそれに関わる分野の研究にフィードバックできる可能性を示唆しているように見える．

2. 研究の目的

上記事実を動機付けとして本申請は次のような研究を行うことを目的とする．

1) 最近の三次元多様体論の発展における (特に Heegaard 分解を要とした) 手法の精密化，拡張を行い，更にそれを用いて三次元多様体論における様々な問題に適用する．

2) 三次元多様体論において得られている様々な結果をより広い幾何的トポロジーでの問題にフィードバックする．特に三次元多様体論を初めとする低次元トポロジーにおける最近の結果をより具体的な (実用的な応用まで見据えた) 問題に適用することを考える．

3. 研究の方法

まず本研究に関わる国内，国外の研究状況について述べる．2001年 J. Hempel は三次元多様体の距離の概念を提出し双曲的三次元多

様体の既約な Heegaard 分解の距離は必ず2以上になることを示した (上述, Topology 40 (2001), no. 3, 631--657) . 引き続き Hartshorn は考えている三次元多様体が種数 g の本質的曲面を含むならばその多様体の任意の Heegaard 分解の距離は $2g$ 以下になることを示している (Pacific Journal of Mathematics 204 (2002), 61-75) . 更に Scharlemann-Tomova は考えている三次元多様体が種数 g, g' の既約な Heegaard 分解を持つならば種数 g' の Heegaard 分解の距離は $2g$ 以下になることを示しており (上述, Geom. Topol. 10 (2006), 593--617), この帰結として上記の Heegaard 分解の剛体性が導かれる．

また Minsky-Moriah-Schleimer (Algeb. Geom. Topol. 7 (2007), 1471--1483), Johnson-Thompson (math.GT/0606226) は距離を利用することにより，種数1の1-bridge 分解を許容しないようなトンネル数1の結び目が存在することを示し．本研究代表者と Yo' av Rieck 氏が論文 (J. Reine Angew. Math. 592 (2006), 63--78) の中で提出した問題に対して否定的な解答を与えることに成功した．本研究代表者は Rieck 氏と共同で以上の距離に関する結果を利用し更に自身の論文の中で定式化した Swallow-follow Torus Theorem (Comm. Anal. Geom. 14 (2006), no. 5, 1037--1077) を利用することにより，2000年森元勘治により提出 (Math. Ann. 317 (2000), no. 3, 489--508) された予想 (結び目 K, K' に対してその連結和 $K\#K'$ のトンネル数が超加法的になる必要十分条件は K, K' が共に primitive meridian を許容しないことである) の反例を構成することに成功した (Algeb. & Geom. Topol., 8 (2008), 953--969) . 以上のように三次元多様体が，非常に距離の大きな Heegaard 分解を利用することにより三次元多様体に関する新しい成果が得られている．一方三次元多様体における様々な微妙な振る舞いも多く研究者によって報告されている (いくらでも大きな種数の既約な Heegaard 分解を持つ三次元多様体の存在 (Kobayashi, Osaka J. Math. 29(1992), pp. 653--674) , 強い意味で既約な最小種数 Heegaard 分解を持つと同時に弱い意味で可約な最小種数の Heegaard 分解を持つ三次元多様体の存在 (Kobayashi-Rieck, Comm. in Anal. and Geom. 17(2009), 637--649) . 上記の結果より，そのような三次元多様体は大きな距離を持った Heegaard 分解を許容しないことがわかるが，このような中途半端な複雑さの Heegaard 分解をもつ三次元多様体の研究は技巧的な面のみならず三次元多様体の幾何的性質の本質を明らかにすると言う

意味で大変興味深い。
本研究の目的はこのような Heegaard 分解の研究を通して、複雑な三次元多様体の振る舞いの本質を明らかにすることである。

4. 研究成果

本研究を通して得られた結果について項目別に述べる。

(1)本質的 lamination に対する Hartshorn 型定理

「3. 研究の方法」で紹介したように Hartshorn は考えている三次元多様体が種数 g の本質的曲面を含むならばその多様体の任意の Heegaard 分解の距離は $2g$ 以下になることを示している。この結果における仮定の中の条件「種数 g の本質的曲面を含む」を「本質的 lamination を含む」と置き換えたときにどのような結果が得られるか、という問題について取り組んだ。これに関してはまず Haken によって示された次の結果：

定理 (Haken)

いま三次元多様体 M は reducible (、即ち、本質的な球面を含む) とする。このとき M の任意の Heegaard 曲面 P に対して M 内の本質的球面で P と一本の横断的閉曲線で交わるようなものが存在する。

の本質的 lamination への拡張が必要となる。そこで本研究ではその各 leaf が平面または開いた annulus と同相となるような本質的 lamination L と三次元多様体 M の種数 2 の Heegaard 曲面 P に対して、 L を適当に動かすことにより、

- ・ L と P は横断的に交わり、かつ
- ・ その交わりの各成分は L 内の本質的な 1 次元多様体になっている、

ようにできる、ということを示すことができた。この種の定式化は新しいものであり、この分野の発展にとって大きな意義があると認識している。この結果については現在も研究は進行中である。

(2)Heegaard 分解の距離の研究

「3. 研究の方法」で紹介した距離は Harvey によって導入された曲面複体を用いて定義されるが、この曲面複体は三次元多様体論に限らない、様々な分野に関連することが知られている。一方 Heegaard 分解の距離に

関しては、基本的な性質でまだ明らかになっていないものも数多くある。そのような例の一つとして次の問題がある。

問題：任意の非負整数 n に対して、その distance がちょうど n となる Heegaard 分解は存在するか。

本研究ではこの問題に対して肯定的な解答を与えることができた。その際に本質的な役割を果たしたのは Schleimer によって与えられた、(距離の定義の中で出てきた) 曲面複体内の測地線の構成方法の一般化であった。これは、曲面複体内に測地線が与えられた時それをより長い測地線に延長するための条件を与えるものであり、この方面の研究の新しい視点を提供していると考えられる。更にこのアイディアに加えて Ma-Qiu-Zou による最近の Heegaard 分解に関する仕事の中で用いられているアイディア (具体的には、既存のものとは異なる部分曲面の曲面複体への射影を考える、というもの) を使うことによって、閉三次元多様体の Heegaard 分解に関して、上記の問題に対する肯定的結果が得られている。

(3)低次元トポロジーの応用に関して

Thurston は三次元多様体の特性を記述するために多様体 X とその上の自己変換群 G が与えられたとき、それに対応する (G, X) 構造と呼ばれる概念を定義した。一方折り紙の世界では宇宙科学研究所に在職していた三浦公亮氏によって考案された「ミウラ折り」と呼ばれる折り紙が世界的に広く知られている。これは数学的には「平面的剛体折り」と定式化されるが、本研究ではトーラス上の相似構造と呼ばれる (G, X) 構造を用いることによってこのような「平面的剛体折り」を系統的に作り出す方法を考案した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① T. Kobayashi, and Y. Rieck, A linear bound on the tetrahedral number of manifolds of bounded volume (after Jorgensen and Thurston), Contemporary Mathematics (査読有) 560 (2011), 27--42.
- ② T. Kobayashi, and S. Umeda, A design for pseudo-Anosov braids using hypotrochoid curves, Topology and its Appl. (査読有) 157 (2010), 280--289.

- ③ T. Kobayashi, and T. Saito, Destabilizing Heegaard splittings of knot exteriors, *Topology and its Appl.* (査読有) 157(2010), 202--212.
- ④ T. Kobayashi, and Y. Rieck, Manifolds admitting both strongly irreducible and weakly reducible minimal genus Heegaard splittings, *Communications in Analysis and Geometry* (査読有) 17(2009), 637--649.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 入井 美紀, 小林 毅, 2次元トーラスの相似構造を用いた一般化されたミウラ折りの構成, Spring Workshop 2013 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications, 2013年3月3日, 名城大学名駅サテライトキャンパス
- ② 小林毅, On the growth rate of tunnel numbers of knots, Workshop on Low Dimensional Topology in Shanghai and Suzhou, 2011, May 17, Shanghai and Suzhou
- ③ 小林毅, 村井紘子, Toward Haken type theorems for essential laminations in 3-manifolds: Proposal of fundamental settings and applications, 「E-KOOK セミナー2010」, 2010年8月28日, 大阪市立大学学術情報センター 10階 (杉本キャンパス)
- ④ 小林毅, On thin presentations of 3-manifolds and links, *Category Theory, Computer Science, and Topology*, 2009, October 18, 信州大学理学部
- ⑤ 小林毅, Realization problems of distances of Heegaard splittings, Workshop: Simplicial Complexes Arising in Low-Dimensional Topology, 2009, July 3, 東京工業大学

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.nara-wu.ac.jp/personal/tsuyoshi/index-j.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 毅 (KOBAYASHI TSUYOSHI)
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号：00186751