

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月24日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540083

研究課題名（和文） ラグランジュ部分多様体とリッチ・ソリトンの幾何学

研究課題名（英文） Geometry of Lagrange submanifolds and Ricci solitons

研究代表者

木村 真琴（KIMURA MAKOTO）

島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号：30186332

研究成果の概要（和文）：

リッチ・ソリトンについて、部分多様体論および超曲面論の観点から考察した。特に、定曲率空間内の局所共形平坦な超曲面がリッチ・ソリトンであって、そのポテンシャルベクトル場が、重複度1の主曲率方向であるものについて、その構造を明らかにした。特に外の空間がユークリッド空間の場合にはこのような超曲面は回転不変であって、3個の連立非線形常微分方程式系の解によって記述できることを示した。

研究成果の概要（英文）：

We investigated Ricci solitons from the view point of hypersurface geometry.

In particular, we studied locally conformally flat hypersurfaces in space forms such that,

The induced metric is a Ricci soliton and the potential vector field is a principal curvature vector of the principal curvature vector of multiplicity one. Then we showed that in the case when the ambient space is Euclidean space, such hypersurface is rotationally invariant.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，幾何学

キーワード：リッチ・ソリトン ラグランジュ部分多様体

1. 研究開始当初の背景

Poincare 予想を微分幾何学の観点から研究するために、Richard Hamilton によって導入されたリッチ・フローは、Perelman による Poincare 予想の解決など、微分幾何学のみならず、数学において重要な役割を果たし

てきた。リッチ・フローの研究を進める上で、Hamilton はリッチ・ソリトンが重要な対象であることを見出し、以後その研究が精力的に行われている。リッチ・ソリトンは、Einstein 方程式にリーマン多様体上のベクトル場 V による計量のリー微分の項を加えた

もので、Einstein 計量の一般化と考えられる。コンパクトリーマン多様体上の計量がリッチ・ソリトンであるとき、2次元の時にはHamilton, 3次元の時にはIveyによって、アインシュタイン計量、すなわち断面曲率が一定の計量に限られることが示されている。一方で、4次元の場合には複素幾何学的手法を用いて、アインシュタインではないコンパクトリーマン多様体上のリッチ・ソリトン計量が小磯によって構成された。今日までそのような非自明なリッチ・ソリトンがいくつか構成されているが、それらはすべて群の作用で不変なケーラー多様体で成されている。

一方、ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何学において基本的に重要な研究対象であるのみならず、ケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体は、リーマン部分多様体論においても、良い性質をもっていて多くの重要な研究が成されてきた。特に、複素ユークリッド空間、さらにリッチ曲率が0であるケーラー多様体(Calabi-Yau多様体)内の特殊ラグランジュ部分多様体は、数学のみならず超弦理論などとも結びついて重要な対象である。そして、複素射影空間内の極小ラグランジュ部分多様体から、複素ユークリッド空間内の特殊ラグランジュ部分多様体が構成できる事も知られていて、これらにより詳細な研究が望まれていた。

2. 研究の目的

まず、部分多様体論および超曲面論の観点からリッチ・ソリトンを考察し、コンパクトな例など興味深い対象の構成を目指すのとともに、部分多様体あるいは超曲面としてのリッチ・ソリトンの構造を調べる。部分多様体としてのアインシュタイン計量に関しても過去多くの研究が成されてきたし、その他極小部分多様体など、変分問題の解として得られる部分多様体に関して、それらの構造がわかっていたり、ある種の条件の下で分類が行われている。リッチ・ソリトンもある種の変分問題の解として得られる事が知られているので、以上の観点を総合しながら部分多様体としてのリッチ・ソリトンの構造の解明を目指す。

また、研究代表者は3次元ユークリッド空間内の直線の1パラメーター族からなる「線織面」の一般化についても研究を重ねてきた。それらを踏まえて、複素射影空間内の極小ラグランジュ部分多様体についても、線織面の一般化として、複素グラスマン多様体や等質空間上のファイバー束を用いて、複素射影空間内の全実全測地的部分多様体のなすmoduli空間内の、より次元の小さい曲面の考察に制約させる。

3. 研究の方法

共同研究者である、韓国・全南大学の Jong Taek Cho 教授と相互訪問および、インターネットを介した研究連絡を通じて、定曲率空間内の超曲面および複素空間形内の実超曲面上のリッチ・ソリトンについて、ガウス・コダッチの方程式など部分多様体論の手法を用いて研究した。また、2009年から2011年の3年間にわたり、松江微分幾何学研究集会を主催し、国内外の微分幾何学者を招聘して最新の研究成果を発表してもらうとともに、リッチ・ソリトンやラグランジュ部分多様体の構造にかんして、討論および研究打ち合わせを行った。

4. 研究成果

まず、定曲率空間内の超曲面で、誘導計量がリッチ・ソリトンであり、かつ異なる2個の主曲率を持ち、かつ一方の主曲率の重複度が1であって、リッチ・ソリトンのポテンシャルベクトル場がその重複度1の主曲率ベクトルであるものについて考察した。前者の条件は、超曲面の誘導計量が局所共形平坦であることと同値であることが従来から知られている。

最初に得られた結果として、この時ポテンシャルベクトル場の双対1-形式は、微分形式として閉であることを示した。これより、上記の超曲面の1次ベッチ数の時には、このリッチ・ソリトンは「勾配リッチ・ソリトン」であることがわかる。Perelmanによって、コンパクトリーマン多様体上のリッチ・ソリトンは「勾配リッチ・ソリトン」、すなわちそのポテンシャルベクトル場がリーマン多様体上のある関数の勾配ベクトル場となっている事が分かっている。リッチ・ソリトンの研究に関して、「勾配リッチ・ソリトン」という条件を課しているものが多いが、本研究は定曲率空間の超曲面で、さらにいくつかの条件の下ではあるが、「勾配」の条件が導かれることがわかった。さらに、外の定曲率空間が断面曲率0のユークリッド空間の場合には、上記の条件をみたす超曲面は「回転超曲面」であって、リッチ・ソリトンの方程式が3個の連立非線形常微分方程式系で記述できることを示した。これより、リッチ・ソリトンの定数の符号によらず、常微分方程式系の初期条件を変化させることによって、(局所的に)互いに合同でないユークリッド空間内のリッチ・ソリトンが構成できることを示した。

また、外の定曲率空間の断面曲率が正の場合、すなわち球面の時には、上記の条件をみたすリッチ・ソリトンの超曲面は、平面曲線上に中心をもつ、平行な球面の族からなることを示した。定曲率空間内の極小超曲面で、異なる2個の主曲率を持つものに関して、1970年に成された大槻富之助による研究が有名で

あって、特に球面内の局所共形平坦超曲面について、はめ込まれたコンパクト非自明なものが存在する事を示している。本研究では、球面内のリッチ・ソリトンで上記の条件を満たすものについて、局所的には同様の構造をもつことを示した。局所共形平坦なリッチ・ソリトンについては、内在的リーマン多様体についての研究がここ数年急速に進展し、コンパクトなものは定曲率空間に限り、完備なものについても定曲率空間とユークリッド空間の積に限ることが知られている。しかし、局所的には常微分方程式の解から具体的に多くのリッチ・ソリトンが構成できることが、本研究によりわかった。

次に、ケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体で、平均曲率ベクトル場に複素構造を施して得られる、部分多様体上のベクトル場が、リッチ・ソリトンのポテンシャルベクトル場となっているものについて考察した。特に、ラグランジュ部分多様体の「Hamilton 極小性」との関係性を明らかにした。

複素ユークリッド空間内の特殊ラグランジュ部分多様体にかんして、D. Joyce による一連の研究があって、その中の一つとして、実1次元の直線の2パラメーター族からなる、3次元複素ユークリッド空間内の3次元特殊ラグランジュ部分多様体の研究がある。本研究では、3次元線織ラグランジュ部分多様体で定曲率となるものについて考察し、特に全測地的でも、リーマン積でもないような例を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計18件)

1. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Ricci solitons on locally conformally flat hypersurfaces in space forms, Journal of Geometry and Physics, 査読有, Vol. 62, No. 8, 2012, pp.1882-1891
2. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Curvature of Hopf hypersurfaces in a complex space form, Results in Mathematics, 査読有, Vol. 61, No.1-2, 2012, pp.127-135
3. Takumi Yamada, Holomorphic vector fields of compact pseudo-Kähler manifolds, Journal of Geometry and Physics, 査読有, Vol. 62, No. 4, 2012, pp. 740-750
4. Takumi Yamada, Ricci flatness of certain compact pseudo-Kähler solvmanifolds, Journal of Geometry and Physics, 査読有, Vol. 62, No. 5, 2012, pp.1338-1345
5. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Ricci solitons of compact real hypersurfaces in Kähler manifolds, Mathematische Nachrichten, 査読有, Vol. 284, No. 11-12, 2011, pp.1385-1393
6. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, η -umbilical hypersurfaces in P2C and H2C, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci., 査読無, Vol. 44, 2011, 27-32
7. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Ruled Lagrangian submanifolds in complex Euclidean 3-space, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci., 査読無, Vol. 44, 2011, 17-26
8. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Ricci solitons and Lagrangian submanifolds in Kähler manifolds, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci., 査読無, Vol. 43, 2010, pp.27-32
9. V. A. Chatyrko, Y. Hattori, Reminders in extensions and finite unions of locally compact sets, Acta Math. Hungar., 査読有, Vol. 128, 2010, 344-357
10. Y. Hattori, Around Nagata's metrics, Sci. Math. Jpn., 査読有, Vol. 71, 2010, 267-272
11. Y. Hattori, Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci., 査読無, Vol. 43, 2010, 13-26
12. V. A. Chatyrko, Y. Hattori, On dimensional properties of the generalized Smirnov's spaces, Topology Appl., 査読有, Vol. 157, 2010, 711-715
13. Y. Hattori, H. Tsuiki, Hyperbolic topology of normalized linear spaces, Topology Appl., 査読有, Vol. 157, 2010, 77-82
14. Jong Taek Cho, Makoto Kimura, Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space forms, Tohoku Math. J., 査読有, Vol. 61, 2009, pp. 205-212
15. V. A. Chatyrko, Y. Hattori, Transfinite large inductive dimensions modulo absolute Borel classes, J. Math. Soc. Japan, 査読有, Vol. 61, 2009, 327-344
16. T. Furumochi, T. Naito, Periodic solutions of difference equations, Nonlinear Anal., 査読有, Vol. 71, 2009, 2217-2222

17. T. Furumochi, M. Muraoka, Periodic solutions of periodic difference equations, Adv. Stud. Pure Math. 査読有, Vol.53, 2009, 51-57
18. T. Furumochi, Periodic solutions of difference equations by Schauder's theorem, Cubo, 査読有, Vol.11, 2009, 55-63

[学会発表] (計8件)

1. 木村真琴, Ricci solitons on hypersurfaces in space forms, 松江微分幾何学研究集会 2011, 2011年12月16日, 島根大学総合理工学部
2. 木村真琴, Ricci solitons on hypersurfaces in space forms, 数理解研研究集会「写像の特異点論と幾何学およびトポロジーと」, 2011年11月29日, 京都大学数理解析研究所
3. 木村真琴, Ricci solitons on hypersurfaces in space forms, 第58回幾何学シンポジウム基調講演, 2011年8月27日, 山口大学理学部
4. 木村真琴, Ruled submanifolds and space of geodesics in complex hyperbolic space, 松江微分幾何学研究集会 2010, 2010年12月10日, 島根大学総合理工学部
5. 木村真琴, Ruled Lagrangian submanifolds in complex Euclidean 3-space, 松江微分幾何学研究集会 2009, 2009年12月11日, 島根大学総合理工学部
6. Makoto Kimura, Ruled Lagrangian submanifolds in complex Euclidean 3-space, 2009 Workshop on Geometric structures and submanifolds, Gwangju-2009, 2009年11月27日, 韓国・光州, 全南大学校
7. 木村真琴, Ruled Lagrangian submanifolds in complex Euclidean 3-space, 広島幾何学研究集会 2009, 2009年10月7日, 広島大学理学部
8. 木村真琴, ファイバー束を用いた線織面の一般化, 松江セミナー, 2009年5月20日, 島根大学総合理工学部

[その他]

ホームページ等

<http://kmakoto.sci.ibaraki.ac.jp/>

<http://info.ibaraki.ac.jp/Profiles/24/0002327/profile.html>

<http://scholar.google.com/citations?use>

r=dNJG_RMAAAJ&hl=en

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 真琴 (KIMURA MAKOTO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号：30186332

(2) 研究分担者

古用 哲夫 (FURUMOCHI TETSUO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号：40039128

服部 泰直 (HATTORI YASUNAO)
島根大学・総合理工学部・教授
研究者番号：20144553

山田 拓身 (YAMADA TAKUMI)
島根大学・総合理工学部・講師
研究者番号：40403117

(3) 連携研究者

()

研究者番号：