

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 13 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540084

研究課題名（和文） 2次元結び目解け予想の解決とその後の発展

研究課題名（英文） Solving the unknotting conjecture in dimension four and its development

研究代表者

松本 堯生（MATUMOTO TAKAO）

広島大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：50025467

研究成果の概要（和文）：2次元滑らか結び目解け予想を、執筆中のマルコフ型定理を仮定して交点数1の1助変数族で自明な結び目につながる場合に帰着した。また、帰着された場合の予想は一種の語の問題に帰着されるが、それを解決するにはある意味で樹木型をしたケーリー図の場合を解析すればよいことが分った。予想の解決は今一歩であると考えられる。

研究成果の概要（英文）：The smooth unknotting conjecture in dimension four is reduced to the case which is connected by a one-parameter family with one intersection point to the unknot, by assuming our Markov type theorem. Moreover, since the reduced case can be studied by a kind of tree type Cayley diagram for the corresponding word problem, the conjecture is expected to be proved in a near future.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：2次元結び目, 2次元ブレイド, 4次元トポロジー, 数学史

1. 研究開始当初の背景

微分トポロジーは一般化されたポアンカレ予想等で1960年代に華々しく幕を開け、結び目理論もほぼ同時期にデーモン補題の証明が与えられ発展した。さらに、 $(n-2)$ 次元球面の n 次元球面への局所平坦な埋め込みは補空間が円周とホモトピー型が等しければ $n=4$ 以外で自明な埋め込みと同相であり、微分可

能な埋め込みなら微分同相でもあることも証明された。1980年代にはフリードマンとドナルドソン等によって4次元多様体の研究が著しく進み、4次元位相ポアンカレ予想および2次元球面の4次元球面への局所平坦な埋め込みの位相的結び目解け予想は解決されている。しかしながら、4次元可微分多様体の研究は、ゲージ理論ばかりでなく古典結び目の

新たな不変量構成にも刺激され、国内外とも不変量によって微分構造を区別する方向に向かい、4次元ホモトピー球面が4次元球面と微分同相であるかという「4次元滑らかポアンカレ予想」および2次元球面が4次元空間に滑らかに埋め込まれ補空間の基本群が無限巡回群のとき自明な埋め込みに微分同相であるかという「2次元滑らか結び目解け予想」の二つの予想は依然として未解決のままである。さらに、ペレルマンによってサーストンの幾何化予想ひいては3次元ポアンカレ予想が解かれたので、古典的な微分トポロジーの未解決大問題は上の二つになってしまったのである。

2. 研究の目的

古典的微分トポロジーの2大未解決問題の一つである「2次元滑らか結び目解け予想」を解決することが第1目的である。さらにそれを発展させ、数学史を含む数学研究環境を良くすることに貢献したい。

予想を2次元ブレイドの1助変数族に関する問題に翻訳し、予想を特別な場合に帰着させること、帰着された問題の具体的な解析方法を与えることは重要であり、それによって目的が達成できると考えている。

3. 研究の方法

2次元滑らか結び目の解け予想解決の出発点は、カスプによる2重点の生成と消滅のみを許した球面からの写像の1助変数族を構成したことである。この1助変数族を2次元ブレイドの1助変数族に変換することはマルコフ型定理であって、研究分担者鎌田聖一氏の手法を交点がある場合に拡張すればよい。また、交点は動かないとしてマルコフ型定理を適用するので、最後のカスプに対応するチャートでの変形つまりノードと端点の融合は別途強制的に行う。このことによって、交点が

2個以上ある場合に、2重点の逆像が2次元球面と区間の直積の中で絡まることは自然に避けられるのである。

さて、最も簡単なチャートは n 本の向きのついた線分のそれぞれに1から n までのラベルが付いたものであり、これを自明なチャートと呼ぶ。2次元ブレイドとしては、 $n+1$ 枚からなり、それぞれの線分の端点は指数2の分岐を表している。また、自明なチャートは自明な2次元結び目を表す。さて与えられた2次元結び目もアレクサンダーの定理により、2次元ブレイド従ってチャートで表され、上で述べたようにこの二つは特異2次元ブレイドつまり線分上に4次元空間内の交点を表すノードを持つかも知れないチャートの1助変数族でつながる。チャートは端点とノード以外に、ブレイド群の関係式に対応して3つの線分が1点で交わる白頂点とラベルの差が2以上の2線分が交わる交点を持っている可能性がある。また、単純でないチャートの1助変数族とは、安定化で新しく現れる線分の端点が他の既にある端点にくっつくこと及びその逆を途中で許すことである。このような場合を込めて、まず途中でブレイドの枚数が変わらないように、枚数を増やして全体の安定化を図る。さらに部分的な安定化をしながら、うまく高さ関数を調整するとなんと交点数が1で途中は全て単純なチャートの1助変数族が分離できるのである。

我々はチャートの1助変数族を円柱の中の特別な曲面族として見ているので、この操作はきちんと立体図で書ける。分離した交点数1の部分は、自明なチャートからの変化をブレイド群の生成元の語の変化で記述することができる。さらに、本質的には語の関係式の数による帰納法によって、もう一方も自明なチャートになることを示すことができるはずである。最後は、交点数に関する帰納法で二

つの結び目はイソトピックになる。

4. 研究成果

本研究の目的は古典的微分トポロジーの2大未解決問題のひとつである2次元滑らか結び目解け予想を解決し、それを種々の意味でさらに発展させることである。2次元滑らか結び目の解け予想解決の出発点は、カスプによる2重点の生成と消滅のみを許した球面からの写像の1助変数族を構成したことである。さらに、それを特異2次元ブレイドの1助変数族に翻訳し、マルコフ型定理の拡張と平面上のチャート図の手法を有効利用することにより予想を解決する方針である。マルコフ型定理を交点がある場合に拡張することは分担者の役割であるが執筆を始めている。

カスプを含んだ1助変数族を特異2次元ブレイドの1助変数族に変換するところは、直接できると矛盾が起こるのだが、不思議なことに実現可能な方法つまりカスプのところを特別扱いするとうまくいく。この部分の再検討を行いその理由を幾分明らかにできた。

交点数を減らす部分はとても慎重に扱う必要があるが、要点は以前の科学研究費補助金報告集に書き上げてあり、平成23年度は京都大学数理解析研究所で5月に開催されたILD T 研究集会で研究発表を行い、この部分までを定理とし残りを予想とした論文を英文講究録に発表した。

1助変数族の交点数が1の場合にも、交点数を減らす上記の方法は2次元特異ブレイドの1助変数族として単純でない部分を除く役割を果たしている。従って、最終段階で扱うべき対象は限られている。この段階のチャート図の変形はブレイド群表示の生成元の語で書き表すことが可能であり、ブレイド群の関係式の積の形に取り直すことができ

る。従って、ケーリー図を持つ。このケーリー図は関係式に対応する多角形を辺と考えるとき樹木型をしているとしてよい。1助変数族の変形によってほとんどの枝は消去できることが分ったが、一部未確認の部分が残っている段階である。

またその後の発展として日本の数学の研究環境を良くするための歴史的考察が目的の中に含まれているが、「和算における行列式の扱い」等に関する研究発表をいくつか行った。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計8件)

- (1) Takao Matumoto, On the smooth unknotting conjecture in dimension four, *Intelligence of Low-dimensional Topology*, 京都大学数理解析研究所講究録1766(2011), 1-14 査読無.
- (2) Takao Matumoto and Noriaki Nakagawa, Complement to explicit description of Hopf surfaces and their automorphism groups, *Osaka J. Math.* 48(2011), 581-588 査読有.
- (3) Mikami Hirasawa, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Bridge presentations of virtual knots, *J. Knot Theory and its Ramifications* 20 (2011), 881-893 査読有.
- (4) 松本堯生, 関の逐式交乗表の解釈とその先, 京都大学数理解析研究所講究録1739(2011), 102-113 査読無.
- (5) Atsushi Ishii, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, The Miyazawa polynomial for long virtual knots, *Topology Appl.* 157 (2010), 290-297 査読有.
- (6) Seiichi Kamada, Quandles derived from dynamical systems and subsets which are closed under quandle operations, *Topology Appl.* 157 (2010), 298-301 査読有.
- (7) Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, Homology groups of symmetric quandles and

cocycle invariants of links and surface-links, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 5501-5527 査読有.

(8) Andrew Bartholomew, Roger Fenn, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, New invariants of long virtual knots, Kobe J. Math. 27 (2010), 21-33 査読有.

[学会発表] (計 14 件)

(1) Takao Matumoto, On the smooth unknotting conjecture in dimension four VII, Nov. 9, 2011, 4次元トポロジー, 広島大学

(2) Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, Sept. 15, 2011, The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics, Seacloud Hotel, 釜山, 韓国

(3) Takao Matumoto, On the smooth unknotting conjecture in dimension four, Intelligence of Low-dimensional Topology, May 25, 2011 at RIMS, Kyoto Univ.

(4) Seiichi Kamada, Monodromy representations and their graphical descriptions, May 17, 2011, Workshop on Low Dimensional Topology in Shanghai and Suzhou, 蘇州大学, 上海, 中国

(5) 松本堯生, ガリレオとガロア(旧世界からの脱皮), 2011年3月13日, 関孝和数学研究所3.14...数学文化シンポジウム, 名城大学

(6) Seiichi Kamada, Genus one Lefschetz fibrations with a certain non-trivial global monodromy, Jan. 12, 2011, Seventh East Asian School of Knots and Related Topics, 広島大学

(7) Takao Matumoto, On the smooth unknotting conjecture in dimension four VI, Nov. 15, 2010, 4次元トポロジー, 広島大学

(8) 松本堯生, 関の逐式交乗表の解釈とその

先, 2010年8月23日 数学史の研究, 京都大学数理解析研究所

(9) 松本堯生, 和算における行列式五種, 2010年5月23日, 日本数学史学会, 同志社大学

(10) Seiichi Kamada, On quandles and biquandles related to twisted virtual links, May 20, 2010, Knots in Washington XXX, George Washington University, 米国

(11) Seiichi Kamada, On symmetric quandle presentations and surface-knots, Jan. 26, 2010, The Sixth East Asian School of Knots and Related Topics, 南開大学, 天津, 中国

(12) Takao Matumoto, On the smooth unknotting conjecture in dimension four V, Jan. 20, 2010, 4次元トポロジー, 広島大学

(13) 鎌田聖一, 結び目のトポロジーとカンドル代数, 2009年9月26日, 日本数学会総合分科会, 企画特別講演, 大阪大学

(14) Seiichi Kamada, Knot symmetric quandles and their presentations, Nov. 8, 2009, アメリカ数学会 Fall Western Sectional Meeting, Algebraic Structure in Knot Theory, Univ. California at Riverside, 米国

[図書] (計 2 件)

(1) 松本堯生, 微分トポロジー (ハーシュ著 Differential Topology の訳書), 丸善, 2012 出版確定, ix+287 頁.

(2) 鎌田聖一, 曲面結び目理論, 丸善, 2012, ix+247 頁.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 堯生 (MATUMOTO TAKAO)
広島大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号: 50025467

(2) 研究分担者

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60254380