

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 5日現在

機関番号：15501
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2011
課題番号：21540085
研究課題名（和文）可微分写像の特異点とジェット空間のコンタクト不変領域のホモトピー論的研究
研究課題名（英文）Homotopy theory on singularities of differentiable maps and K-invariant spaces of the jet spaces.
研究代表者
安藤 良文 (ANDO YOSHIFUMI)
山口大学・名誉教授
研究者番号：80001840

研究成果の概要（和文）：研究代表者による n 次元有向閉多様体から n 次元有向閉多様体 P への写像度0の折り目写像のコボルズム類の研究から、球面の n 次元安定ホモトピー群を折り目写像の拡大写像の特異点によって評価する問題が提起された。先の論文では7次元までの成果を述べたが、その結果をさらに高次元に進める研究を行った。ある種の K -軌道の和の $4q$ 次元のThom多項式のトップ次元のPontrjagin類 P_q の係数を決定して、対応する $4q-1$ 次元の J -imagesの元をそのThom多項式で評価する成果を得た。

研究成果の概要（英文）：We first proved that there exists an isomorphism of the group of oriented cobordism classes of fold maps of closed oriented n -manifolds to the given oriented closed manifold P of degree 0 to the homotopy group of P to the well-known space F . An element of the n -th stable homotopy group of spheres can be possibly detected by singularities of some extension of a corresponding fold map. We tried to solve this problem in the higher dimensions. Two types of singularities of maps between $4q$ -manifolds whose Thom polynomials with integer coefficients have nonvanishing coefficients of the leading Pontrjagin class $P_{\{q\}}$ can detect elements of J -images.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	784,686	235,405	1,020,091
年度			
年度			
総計	2,684,686	805,405	3,490,091

研究分野：微分トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：特異点、可微分写像、ホモトピー、折り目、コボルディズム。

1. 研究開始当初の背景

研究代表者により、一定の多様体 P への n 次元閉多様体からの与えられた K -普遍 class に属する高次特異点を許容する可微分写像のコボルズム類のつくる群にたいして、関連する分類空間が導入された。上記の折り目写像の場合には、この分類空間はホモトピー論でよく知られた球面の間の写像空間である F になる。

特に、 n 次元閉多様体から n 次元球面への写像度0の折り目写像のコボルズム類は球面の n 次元安定ホモトピー群と同型になる。これにより、球面の n 次元安定ホモトピー群と対応する折り目写像のある拡大写像の特異点によって評価するという両者の間の深い関係を調べる研究課題が生じた。7次元までは、J.

Matherの nice range の中での単純特異点の点として現れる特異点のある代数的個数によって、球面の安定ホモトピー群の元を評価する方法が研究成果として発表された。その成果は、研究を開始する以前の、 n 次元多様体の間の可微分写像に対して、Thom多項式のトップ次元の Pontrjagin類の係数が消えていない例の、4次元の場合の Boardman symbol が (2) の特異点と8次元の

Feher-Rimanyiの与えた K -軌道の和の特異点を使って得られた。当時はそれ以外の例は知られていなかったもので、高次元にこの結果を適用できなかった。

2. 研究の目的

n 次元閉多様体から一定の多様体 P への与えられた K -普遍 class に属する高次特異点を許容する可微分写像のコボルズ

ム類のつくる群に関連して定まる前述の分類空間のトポロジー、特にホモトピー群の研究、および、特に興味深い n 次元閉多様体 N から n 次元球面への degree が 0 の可微分写像のコボルディズム群と球面の安定ホモトピー群との関係において、 N を境界を持つ $(n+1)$ 次元多様体から $(n+1)$ 次元円盤への可微分写像の特異点が球面の安定ホモトピー群の元を評価する普遍量を特定する研究を目的とした。具体的には、写像の K -普遍 class に属する特異点の位相的構造、および、それらの特異点の隣接関係の調査によって、一般化された Thom 多項式による不変量が上記の分類空間のホモトピー群の torsion と関わる研究を課題とした。普遍量としては、 $4q$ 次元の場合には、Pontrjagin 類であるが、そのトップ次元は消えていないものを見つけることが、非常に困難である。既知の高次元の K -普遍特異点を丹念に調べ、サイクルとなり、トップ次元の $P_{\{q\}}$ の係数の計算を可能にすることである。

3. 研究の方法

Thom-Boardman symbol が一定以上の代数的集合や、J. Mather の分類により Boardman symbol が (2) の K -普遍特異点はある程度わかっているもので、それらの中から期待される条件を持つ特異点を探し出す操作を丹念に行う。そのために、Thom-Boardman 特異点を含め、余次元が一定以上のコンタクト軌道の作る代数的集合の位相幾何学を調べ、それらの Thom 多項式、高次 Thom 多項式の計算を継続して行うこと。さらには

Boardman symbol が(2)以上の K -普遍特異点を分類し、それらの中から期待される条件を持つ特異点を探し出す操作を丹念に行う。その結果を踏まえ、 J -images との関連では、Thom 多項式のトップ次元の Pontrjagin 類の係数の計算を進め、その成果の下にコボルディズム群の分類空間のトポロジーへの応用を進展させること。これらの研究を関連分野の研究者の専門知識の供与を受け研究協力をして達成すること。

4. 研究成果

研究を開始する以前には、上に述べたように、 n 次元多様体の間の可微分写像に対して、その余次元が $4k$ の特異点のThom多項式のトップ次元のPontrjagin類の係数が消えていないものは、4次元の場合のBoardman symbolが(2)の特異点と8次元のFeher-Rimanyiの与えたある K -軌道の和の特異点だけであった。本研究の間、かなりの種類のBoardman多様体のThom多項式を計算して、そのトップ次元のPontrjagin類の係数を調べたが、その範囲からはトップ次元のPontrjagin類の係数が消えていないものは見つからなかった。それらの特殊なThom多項式の計算を計算する方法を見つけ、decomposableな部分の計算を行った。一方、具体的には述べないが、ある2種の一般的な $4q$ 次元において、ある特定の K -軌道の和に対してはThom多項式のトップ次元のPontrjagin類の係数が残るものを発見した。対応する J -imagesの元をそのPontrjagin類の係数で評価する成果を得た。一定の多様体 P への n 次元閉多様体からの与えられたclassに属する高次特異点を許容する可微分写像のコボルディズム類のつくる群から関連して導入

された分類空間が存在することを先の論文で発表した。その分類空間のホモトピー群に $4q-1$ 次元の J -imagesからくるtorsionが生き残るので、これらの関係が密接なものであり、特異点の研究と球面の安定ホモトピー群の関係は相当に強いことが得られる。これが、主要な研究成果であるが、関連するThom多項式の応用として、almost parallelizableな有向閉多様体からparallelizableな有向多様体への写像の特異点の研究も行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Yoshifumi Ando, Leading terms of Thom polynomials and J -images, Kyoto Journal of Mathematics, 52(2012), 345-367, 査読有.
- ② Yasuyuki Miyazawa, Gordian distance and polynomial invariants, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, 20(2011), 895-907, 査読有.
- ③ Sadahiro Maeda, Hiroo Naitoh, Real hypersurfaces with ϕ -invariant shape operator in a complex projective space, Glasgow Mathematical Journal, 53(2011), 347-358, 査読有.
- ④ I. Kiuchi, Y. Tanigawa, and W. Zhai, Analytic properties of double zeta-functions, Indagationes Mathematicae, 21(2011), 16-29, 査読有.
- ⑤ Yasuyuki Miyazawa, A link invariant dominating the HOMFLY and the Kauffman polynomials, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 19(2010), 1507-1533, 査読有.

⑥ Shizuo Kaji, Equivariant Scubert, seen from torus equivariant topology, Trends in Mathematics-New series, 12(2010), 71-90, 査読有.

⑦ Yasuyuki Miyazawa, A multi-variable polynomial invariant for unoriented virtual knots and links, J. Knot Theory Ramifications, 18(2009), 625-649, 査読有.

⑧ Yoshihisa Sato, 2-spheres of square -1 and the geography of genus -2 Lefschetz fibrations, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 15(2009), 461-491, 査読有.

[学会発表] (計 5 件)

① Yasuyuki Miyazawa, The HOMFLY polynomial and admissible values, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012年1月11日, KAIST, Korea.

② 内藤博夫, 対象空間の曲面論へのグラスマン幾何的アプローチ, 研究集会「部分多様体・湯沢2010」, 2010年11月27日, 新潟県・湯沢グランドホテル.

③ Yasuyuki Miyazawa, A distance for diagrams of a knot, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, 2010年9月20日, Colima Univ. Mexico.

④ Shizuo Kaji, Equivariant Scubert calculus of Coxeter groups, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, 2010年9月20日, Colima Univ. Mexico.

⑤ Yoshihisa Sato, An attempt to introduce the notion of Iitaka-Kodaira dimensions into Lefschetz fibration, Branched Coverings, Degenerations and Related Topics, 2010年3月8日, 広島大学. 東広島市

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安藤 良文 (ANDO YOSHIFUMI)

山口大学・名誉教授

研究者番号: 80001840

(2) 研究分担者

小宮 克弘 (KOMIYA KATUHIRO)

山口大学・名誉教授

研究者番号: 00034744

[H21]

宮澤 康之 (MIYAZAWA YASUYUKI)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 60263761

内藤 博夫 (NAITOH HIROO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 10127772

木内 功 (KIUCHI ISAO)

山口大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号: 30271076

[H23]

鍛冶静雄 (KAJI SHIZUO)

山口大学・大学院理工学研究科・講師

研究者番号: 00509656

[H22-23]

飯寄信保 (IIYORI NOBUYASU)

山口大学・教育学部・教授

研究者番号: 00241779

[H22]

佐藤好久 (SATO YOSHIHISA)

九州工業大学・情報工学部・教授

研究者番号: 90231349

[H21]