

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 30日現在

機関番号：17701  
 研究種目：基盤研究(C)  
 研究期間：2009～2011  
 課題番号：21540088  
 研究課題名（和文）：代数的空間および滑層空間の位相幾何的総合研究  
 研究課題名（英文）：Comprehensive studies of topological aspects of algebraic spaces and stratified spaces  
 研究代表者：與倉 昭治 (YOKURA SHOJI)  
 鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授  
 研究者番号：60182680

研究成果の概要（和文）：(1) motivic Hirzebruch classを用いてMilnor number の一般化であるmotivic Milnor classを構成した。(2) Chern class のゼータ関数などを特殊な場合として含む,motivic Hirzebruch classのゼータ関数を構成した。(3)代表者が以前構成したuniversal bivariant theoryのアイデアを用いて、fiberwise bordism groupを導入し、さらに differentiable space の理論を用いて、fiberwise bordism groupのbivariant theoryを構成できることを示した。(4)通常は自然変換として捉えることができない加法的不変量を、圏論的に自然変換として捉えることが出来ることを示した。

研究成果の概要（英文）：(1) Using motivic Hirzebruch class, we constructed Motive Milnor classe, which is a generalization of the Milnor number. (2) We constructed a zeta function of the motivic Hirzebruch class, a special case of which gives rise to the zeta function of the Chern class. (3) Using the idea in the universal bivariant theory introduced by the representative of this grant, we introduced the notion of fiberwise bordism group and we showed that we could construct a bivariant theory of fiberwise bordism group, using the notion of differentiable spaces. (4) We showed that any additive invariant, which cannot be usually captured as a natural transformation, could be captured as a natural transformation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,700,000	510,000	2,210,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：位相幾何学、代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：代数多様体、コボルディズム、モチーフ、特性類、bivariant theory、algebraic cobordism、ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

研究代表者與倉は、2005年に J.-P. Brasselet 博士(仏, Luminy 研究所)、J. Schürmann 博士(独, Münster 大学)との共同研究で、複素代数多様体の相対 Grothendieck 群の共変関手  $K_0(V/-)$  から  $Q[y]$  係数のホモロジー群の共変関手  $H_*(-;Q[y])$  の自然変換

$T:K_0(V/-) \rightarrow H_*(-, Q[y])$  で、 $X$  が非特異多様体の場合「 $T([\text{id}_X: X \rightarrow X])$  は  $T_y(X)$  のポアンカレ双対となる」を満たすものが唯一存在することを齋藤盛彦氏の Mixed Hodge Modules の理論を用いて証明した。ここに、 $T_y$  は Hirzebruch の特性類と呼ばれるもので、一種の Todd 類の変形である。この自然変換を  $T_{y,*}$

で表す。  $T_{y,*}$  の存在証明には他にも2つあり、それぞれ利点がある。しかし、齋藤氏の Mixed Hodge Modules の理論を用いている事が、特に重要であると言える。我々の Mixed Hodge Modules の理論の応用は、2008年に Springer Verlag 社から出版された Peters-Steenbrink の本などにも引用されている。

この自然変  $T_{y,*}:K_0(V/-)\rightarrow H_*(-, Q[y])$  の重要性は大きく次の2つである。

(1) Deligne の Mixed Hodge Structure を用いて定義される motivic characteristic 又は Hodge 多項式  $E(-, u, v):K_0(V)\rightarrow Z[u, v]$  の高次元 homology 版であること、すなわち Grothendieck-Riemann-Roch 型の定理であること。その意味で、  $T_{y,*}:K_0(V/-)\rightarrow H_*(-, Q[y])$  を **motivic characteristic class** と呼ぶ。

(2) 我々の motivic characteristic class  $T_{y,*}:K_0(V/-)\rightarrow H_*(-, Q[y])$  は、以下の3つの重要な特異多様体の特性ホモロジー類の理論

(1) MacPherson's Chern class

(2) Baum-Fulton-MacPherson's Riemann-Roch,

(3) Cappell-Shaneson's L-class 又は Goresky-MacPherson's L-class

を統一することである。その意味では、これは1973年に MacPherson によって提起された unification 問題に対する肯定的な解答 と言える。

## 2. 研究の目的

本研究では、以下の4つの項目に関して、motivic characteristic class および関連する事項について更に研究を進めることであった。

(1) 上記の3つの内、Chern 類および Todd 類の特性類の理論は、連携研究者の大本亨氏などにより個別に equivariant 版が構成されているので、これを統一するものとして、

この motivic characteristic class  $T_{y,*}$  の equivariant 版の構成 を考える。これにより、L-類の equivariant 版も構成できることになる。なお、特異多様体の L-類の研究に関しては stratified spaces (滑層空間) の位相の研究を更に押し進める必要がある。

(2) MacPherson's Chern Chern class の理論は proalgebraic variety (複素代数多様体の射影極限) に研究代表者與倉によって拡張された。同様に、motivic characteristic class  $T_{y,*}$  を proalgebraic variety に拡張することを考察する。これができれば、同時に、Riemann-Roch, および L-class についても拡張されることにある。

(3) motivic characteristic は motivic measure/integration で基本的役割をするが、研究分担者の安田健彦氏により、Deligne-Mumford スタックに motivic measure/integration が拡張された。

これに鑑み、motivic characteristic class  $T_{y,*}$  をより一般に代数的スタックに拡張する

事を考える。

(4) この上記3つの研究に深く関連するものが、Fulton-MacPherson の意味での bivariant theory (双変理論) である。motivic characteristic class  $T_{y,*}$  の双変理論版を構成することである。Levine-More の Algebraic Cobordism の理論と深く関係する。

## 3. 研究の方法

### 平成21年度

(1) 2009年8月24日~8月28日、ストラスブルグで開催される第5回日仏特異点シンポジウム「Singularities in Geometry and Topology」に、Scientific Committee Member として参加し、並びに、研究発表および参加者達との研究連絡を行った。

(2) J.-P. Brasselet 博士 J. Schürmann 博士, C. McCrory 博士 (米国, Georgia 大学) をそれぞれ適切な時期に1週間鹿児島大学に招聘し、共同研究を行った。更に、セミナーまたは講演会を開催し、3博士にはレビューまたは研究発表を行ってもらった。

(3) 代表者および分担者全員、本研究と関連する、国内で開催された研究集会・シンポジウムに参加し研究発表または研究連絡を行った。研究集会等に参加できない場合は、関連する研究を行っている国内の研究者達を招聘し、研究協力をしてもらった。

(4) 2010年2月に、本研究に関連する研究集会「第5回代数・解析・幾何学セミナー」を鹿児島大学理学部で開催した。

### 平成22年度

(1) 2010年5月に Heidelberg 大学に1週間ほど滞在し、M. Banagl 博士と共同研究を行った。

(2) 2010年度内に開催された国内または国外の研究集会に出席し、研究成果の発表ならびに参加者達との研究連絡を行った。

(3) J. Schürmann 博士, Banagl 博士を適切な時期に1週間鹿児島大学に招聘し、共同研究を行った。更に、セミナーまたは講演会を開催し、2博士にはレビューまたは研究発表を行ってもらった。

(4) 代表者および分担者全員、本研究と関連する、国内で開催された研究集会・シンポジウムに参加し研究発表または研究連絡を行った。また、関連する研究を行っている国内の研究者達を招聘し、研究協力をしてもらった。

(5) 2011年2月に、本研究に関連する研究集会「第6回代数・解析・幾何学セミナー」を鹿児島大学理学部で開催した。

### 平成23年度

(1) 2011年7月に Hefei で開催された Singularity Theory and Applications で研究発表ならびに参加者達と研究連絡を行った。

(2) 2011年度内に開催された国内または国外の

研究集会に出席し、研究成果の発表ならびに参加者達との研究連絡を行った。

(3) 代表者および分担者全員、本研究と関連する、国内で開催された研究集会・シンポジウムに参加し研究発表または研究連絡を行った。また、関連する研究を行っている国内の研究者達を招聘し、研究協力をしてもらった。

(4) 2011年12月にOberwolfach数学研究所で研究発表ならびに参加者達と研究連絡を行った。また、鹿児島に招聘する予定であったBanagl氏とSchürmann氏も研究集会に参加していたので、彼らと研究連絡を行った。

(5) 2012年2月に、本研究に関連する研究集会「第7回代数・解析・幾何学セミナー」を鹿児島大学理学部で開催した。

#### 4. 研究成果

(1) Motivic Hirzebruch class を使って、これまで自然変換として捉えられていなかったMilnor類を自然変換として捉えるモチビックMilnor-Hirzebruch類の理論を導入・定式化して、Milnor類の概念を拡張し、またVerdier-Riemann-Roch型の定理など関連する定理等を証明した。

(2) Levine-Morel のalgebraic cobordismはbordism理論あるいはcobordism理論を基礎に構成されたもので、一般cohomology論の中で普遍的なものである。Fulton-MacPhersonのbivariant theoryの意味で申請者によって構成されたuniversal oriented bivariant theoryの構成をヒントに、Schürmann氏との共同研究で、Atiyahのbordism理論やThomのcobordism理論のbivariant theory版とも言えるbivariant bordism群の理論を構成した。これは、Atiyahのbordism理論では捉えられない量を含んでいる。

(3) Motivic Hirzebruch classのゼータ関数を構成し、Chern類のゼータ関数、Todd類のゼータ関数、Hirzebruch-ThomのL-類のゼータ関数を統一的に扱えることを示した。

(4) Motivic Hirzebruch classの構成を踏まえて、相対Grothendieck群を少し一般化することによって、通常は自然変換として捉えることができない加法的位相不変量を、常に圏論的に自然変換として捉えることが出来る(categorificationと言う)を示した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計35件)

(1) Shoji Yokura, “Bivariant motivic Hirzebruch class and a zeta functions of the motivic Hirzebruch class”, Proc. 5<sup>th</sup> Franco-Japanese Symposium on Singularities,

IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, (53 pages) (印刷中), 査読有

(2) Jörg Schürmann and Shoji Yokura, “Motivic bivariant characteristic classes and related topics”, Journal of Singularities, Vol. 5 (2012), 124-152, 査読有, DOI: 10.5427/jsing.2012.5j,

(3) Shoji Yokura, “Characteristic classes of pro- algebraic varieties and motivic measures”, Algebraic & Geometric Topology, Vol.12 (2012) 601-641, 査読有, DOI: 10.2140/agt.2012.12.601

(4) Jörg Schürmann and Shoji Yokura, “Grothendieck groups and a categorification of additive invariants”, International J. Mathematics, Vol.23, No.1 (2012) 1-37, 査読有

DOI No: 10.1142/S0129167X12500577

(5) Tadashi Aikou, “Averaged Riemannian metrics and connections with application to locally conformal Berwald manifolds”, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), (15pages) 印刷中, 査読有  
<http://www.math.klte.hu/publi/contents.php>,

(6) Toru Ohmoto, “Vassiliev type invariants for generic mappings, revisited”, to appear in Contemp. Math., AMS, Proceedings of the 11th International Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC-USP/Sao Carlos-Brazil (July 26-30, 2010). 査読有 印刷中

(7) Toru Ohmoto, “A note on Chern-Schwartz-MacPherson class”, Proc. the 5th France-Japanese symposium on Singularities (Aug. 24-29, 2009, Strasbourg), IRMA lecture note series, 査読有 印刷中

(8) Shoji Yokura, “Genera and characteristic classes of singular varieties”, Oberwolfach Reports OWR No. 56/2011, (2011) 59 - 62, 査読無  
DOI: 10.4171/OWR/2011/56

(9) Tadashi Aikou, “Semi-parallel vector fields and conformally flat Randers metrics”, Publicationes Mathematicae Debrecen, 78 (2011), 191-207, 査読有,  
[http://www.math.klte.hu/publi/load\\_jpg.php?p=1532](http://www.math.klte.hu/publi/load_jpg.php?p=1532)

(10) Hitoshi Furusawa, Yasuo Kawahara, Michael

Winter, “Dedekind Categories with cutoff operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, 173 (2011), 1–24, DOI: 10.1016/j.fss.2010.11.008, 査読有

(11) Shoji Yokura, “Motivic characteristic classes”, in “Topology of Stratified Spaces”, MSRI Publications 58, Cambridge University Press (2010), 375–418, 査読有 <http://library.msri.org/books/Book58/files/42yokura.pdf>

(12) Jean-Paul Brasselet, Jörg Schürmann and Shoji Yokura, “Hirzebruch classes and motivic Chern classes for singular spaces”, *Journal of Topology and Analysis*, Vol. 2, No. 1 (2010), 1–55, 査読有  
DOI : 10.1142/S1793525310000239

(13) Shoji Yokura, “Motivic Milnor classes”, *Journal of Singularities*, Vol. 1 (2010), 39 – 59, 査読有  
DOI: 10.5427/jsing.2010.1c

(14) Kimio Miyajima, “CR deformations of cyclic quotient surface singularities”, “The Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities JARCS III”, *CMA Proceedings*, 43 (2010), 55–65, 査読有, <http://maths-old.anu.edu.au/research.publications/proceedings/043/>

(15) Tadashi Aikou, “Some remarks on Berwald manifolds and Landsberg manifolds”, *Acta Math. Acad. Paedagogicae Nyiregyhaziensis*, 26, No. 2., (2010), 139–148, 査読有, [http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol26\\_2/amapn26\\_13.pdf](http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol26_2/amapn26_13.pdf)

(16) Shoji Yokura, “A universal bivariant theory and cobordism groups”, *Adv. Studies in Pure Math.*, Vol. 56 (2009) 363–394 (The Proceedings of the Fourth Franco-Japanese Symposium on Singularities), 査読有, <http://www.ams.org/bookstore/aspmseries>

(17) Shoji Yokura, “Oriented bivariant theories, I”, *International Journal of Mathematics*, Vol. 20, No. 10 (2009), 1305–1334, 査読有  
DOI : 10.1142/S0129167X09005777

(16) Takehiko Yasuda, “On monotonicity of F-blowup sequences,” *Illinois Journal of Mathematics*, 53 (2009), 101–110, 査読有 <http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version>

=1.0&verb=Display&handle=euclid.ijm

(18) Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda, “Non-commutative resolution, F-blowups and D-modules”, *Advances in Mathematics*, 222 (2009), 318–330, 査読有, <http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2009.04.004>,

(19) Toru Ohmoto, “Thom polynomials and around”, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B11, New Trends in Combinatorial Representation Theory eds. S. Ariki and M. Okado, (2009), 75–86, 査読有 <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B11/B11.html>

(20) 大本 亨, “特異点の数え上げと同変 Chern 類”, *数学 (日本数学会)*, 61 卷 1 号 (2009), 21–39, 査読有 <http://mathsoc.jp/publication/sugaku/index61.pdf>

[学会発表] (計 38 件)

(1) Takehiko Yasuda, Motivic integration and modular representations of a cyclic group of prime order, 第 7 回代数・解析・幾何学セミナー、鹿児島大学、2012 年 2 月 15 日

(2) Toru Ohmoto, Singular Chern class and degree formula, 第 7 回代数・解析・幾何学セミナー、鹿児島大学、2012 年 2 月 15 日

(3) 宮嶋公夫, 強擬凸 CR 構造とその変形入門 I, II、研究集会「接触構造・特異点・微分方程式およびその周辺」、鹿児島大学 2012 年 1 月 20 日, 21 日

(4) Shoji Yokura: Special Introductory Lecture, “Genera and characteristic classes of singular varieties”, *Stratified Spaces: Joining Analysis, Topology and Geometry*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, December 12–16, 2011, 2011 年 12 月 13 日,

(5) Takehiko Yasuda, Higher Nash blowups, Artin approximation and arcs, シュレーディンガー研究所、オーストリア、2011 年 11 月 23 日,

(6) Tadashi Aikou, Some remarks on average metrics and connections, The 46th symposium on Finsler Geometry, 静岡市, 2011 年 1 月 18 日

(7) 與倉昭治: Fiberwise bordism groups and related topics, 東京大学大学院数理科学研究科トポロジー火曜セミナー、2011 年 11 月 8 日

(8) Takehiko Yasuda, Quotient-like singularities in positive characteristic and noncommutative rings, 第6回日仏特異点シンポジウム, 九州大学西陣プラザ, 2011年9月7日

(9) 安田健彦, F-blowups in dimension two, 特異点論とそのひろがり(招待講演), 京都大学, 2011年8月23日

(10) Shoji Yokura: “Fiberwise bordism groups”, SINGULARITY THEORY CONFERENCE, University of Science and Technology of China Hefei, China, July 25-31, 2011, 2011年7月27日、

(11) Hitoshi Furusawa, Relational and Multirelational Representation Theorems for Complete Idempotent Left Semirings, 12th International Conference on Relational and Algebraic Methods in Computer Science (RAMiCS 2011), Rotterdam, The Netherlands, 2011年6月1日

(12) Takehiko Yasuda, Noncommutative resolution of pure subrings and Frobenius morphisms, Workshop on non-commutative geometry and the McKay correspondence, 名古屋大学, 2011年3月15日、

(13) Toru Ohmoto, Chern class for singular spaces, JSPS-VAST Japan-Vietnam Bilateral Joint Projects Topology of singularities and related topics, II, 東北大学大学院理学研究科数学教室川井ホール、2011年1月6日

(14) Shoji Yokura, Natural transformations associated with additive homology classes, 共同研究集会「実閉体上の幾何と特異点論への応用」(京都大学数理解析研究所, 2010.11.30~12.3), 2010年11月30日

(15) Hitoshi Furusawa, Representation Theorems for Complete Idempotent Left Semirings, Workshop on Lattices, Relations and Kleene Algebras, University College London (イギリス), 2010年9月21日

(16) Toru Ohmoto, Vassiliev type invariants revisited, The 11th International Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC-USP/Sao Carlos- Brazil, 2010年7月27日、

(17) Tadashi Aikou, Negative vector bundles and complex Finsler geometry, 2010 International conference on Finsler geometry, Chern Institute (中国) 2010年6月21日、

(18) Shoji Yokura, A categorification of

additive homology classes, Mathematisches Kolloquium, Mathematisches Institute der Universitaet Heidelberg, Germany, 2010年5月20日

(19) Takehiko Yasuda, Commutative and noncommutative desingularizations via Frobenius morphisms, Workshop on Higher Dimensional Algebraic Geometry, National Taiwan University (台北), 2010年4月1日、

(20) Takehiko Yasuda, Frobenius morphisms and noncommutative resolutions, Algebraic geometry in characteristic p and related topics, 東京大学、2010年2月19日、

(21) Takehiko Yasuda, An application of the Frobenius morphism of a noncommutative Blowup, Higher Dimensional Algebraic Geometry, 京都大学、2009年12月17日、

(22) Kimio Miyajima, Analytic construction of deformation of resolution of normal isolated singularities, Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, The University of Sydney, Australia, 2009年9月17日、

(23) Shoji Yokura, Motivic canonical classes, Workshop “Geometry of Singularities”, Universität Münster, Germany August 31 - September 1, 2009, 2009年8月31日、

(24) Toru Ohmoto, Some formulae of Chern classes of Symmetric products and Hilbert schemes, Workshop “Geometry of Singularities”, Universität Münster, Germany August 31 - September 1, 2009, 2009年8月31日、

(25) Takehiko Yasuda, Noncommutative resolution and Frobenius morphism, The 5th Franco-Japanese Symposium on Singularities, IRMA, Strasbourg, France, 2009年8月27日、

(26) Shoji Yokura, Motivic bivariant classes and motivic zeta functions, The 5<sup>th</sup> Franco-Japanese Symposium on Singularities, IRMA, Strasbourg, August 24 -28, 2009, 2009年8月25日、

(27) Tadashi Aikou, Some remarks on Kahlerian Finsler manifolds, Workshop on Finsler Geometry and its Applications (May 24-May 29, 2009), , Debrecen, Hungary, 2009年5月25日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

與倉 昭治 (YOKURA SHOJI)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：60182680

### (2) 研究分担者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：40107850

愛甲 正 (AIKOU TADASHI)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：00192831

安田 健彦 (YASUDA TAKEHIKO)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：30507166

古澤 仁 (FURUSAWA HITOSHI)  
鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：00357930

### (3) 連携研究者

大本 亨 (OHMOTO TORU)  
北海道大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：20264400