

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月 1日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540089

研究課題名（和文） 曲線、曲面の共形幾何学と幾何学的結び目理論

研究課題名（英文） Conformal geometry of curves and surfaces and geometric knot theory

研究代表者

今井 淳 (IMAI JUN)

首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻 准教授

研究者番号：70221132

研究成果の概要（和文）：ユークリッド空間内の領域に対して、繰り込まれたポテンシャルの1パラメータ族を導入した。パラメータの値を固定したときに、そのポテンシャルを最大（あるいは最小）にする点が唯一になるための十分条件を与えた。ポテンシャルの特別な場合を領域で積分したものの繰り込みを用い、結び目とランダムな円との絡み数の二乗の平均の繰り込みを得た。これはメビウス変換で不変な量となる。

研究成果の概要（英文）：A one-parameter family of renormalized potentials of a compact domain of an Euclidean space is introduced. A couple of sufficient conditions for the uniqueness of a point that gives the maximum (or minimum) value of the potential are given. The renormalization of the average of the squares of the linking numbers of a given knot and random circles, which can be considered as generalization of the renormalization of the integration of a potential on the domain, is studied. It turns out to be invariant under Mobius transformations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分トポロジー、結び目のエネルギー

1. 研究開始当初の背景

研究代表者の今井は約20年前から結び目のエネルギーを研究してきた。これは、結び目の大域的な複雑さを測る汎関数を考え、各イソトピー型の中でのその汎関数の最小値とそれを実現する埋め込み写像を求める研究である。ここから、次の二つの研究が派生した。A.メビウス幾何学的側面：メビウス変換で不変であるようなものを用いて、曲線や

曲面の幾何学を研究する。(ランジュヴァン氏との共同研究) B. 幾何学的結び目理論：結び目不変量ではなくて、埋め込み写像自体から得られる幾何学的な量を研究する。

2. 研究の目的

上の研究の背景で述べたA, B二つをそれぞれ進展させること。具体的には、曲線（結び

目、絡み目を含む)、曲面、領域に対して、大域的な情報を持つような汎関数を定め、それに関する最適問題を考える。つまり、その汎関数の値の最大あるいは最小を与える形、または点の存在および唯一性などを研究する。

3. 研究の方法

研究の背景で述べたAのメビウス幾何学的側面については、曲線、曲面の配置空間上のある種の微分形式や、球面のなす空間の不定値計量など、メビウス幾何の枠組みで自然に登場するもの(従ってメビウス変換で不変となる)を用いて研究する。

Bの幾何学的結び目理論は、ユークリッド空間の領域に対する、繰り込まれたポテンシャルの1-パラメータ族の研究に発展した。これには、凸幾何学的手法を用いる。

更に、A、Bを合わせた研究をソラネス氏と共同で始めた。これには、積分幾何学的手法を用いる。

4. 研究成果

(1) (フランスのレミ・ランジュヴァン氏、大学院生の坂田繁洋君との共同研究) 曲線のメビウス変換に関する不変量である、共形的曲率、共形的れい率を、その曲線の接触円や接触球を用いて記述した。古典的な結果いくつかを、新しい視点で統合した。

(2) 福岡大学の柴田先生の三角形の灯心の話に触発され、結び目のエネルギーを定義したときに用いたのと同様の繰り込みの手法を適用することにより、ユークリッド空間内の領域に対して、リースポテンシャルを一般化して、繰り込まれたポテンシャルの1パラメータ族を定義した。これは凸領域に対してLutwakが導入した双対混合体積の、一般の領域への拡張にもなっている。パラメータの値を固定したときに、そのポテンシャルを最大(あるいは最小)にする点を、そのパラメータの値での、その領域の一般化された中心ということにする。これは一般には唯一とはならない。これが唯一になるための十分条件をいくつか与えた。これにより、ポテンシャル論に幾何学的な視点から、今後の発展が望まれるような新しい題材を提供した。

(3) (スペインのジル・ソラネス氏との共同研究) 平面の領域に対して、メビウス変換で不変となるような量を定義した。これは、上の(2)のポテンシャルのあるものを、その領域で積分したものを繰り込むことによっても得られる。これを結び目のザイフェルト膜に適用すると、与えられた結び目とラン

ダムな円との絡み数の二乗の平均を繰り込んだものが得られることを示した。繰り込みと積分幾何学的手法を、メビウス幾何学の範疇で用いて、幾何学および結び目理論に新しいことを生み出した。

(4) 直線を軸とする二重螺旋に対して、いろいろなエネルギーを考え、それを最小にする螺旋の傾きを計算機による数値実験で計算した。これは、DNAや高分子の研究に役立つと考えられる。

(5) 等周問題を高次元化して、平面領域に対し、その上の錐の中で、体積の二乗と表面積の三乗の比を最大にするようなものをとる。このときその頂点を平面に射影した点を考えると、領域のある種の変分的な中心と思うことができる。領域が三角形のときには、そのような点は内心になることを示した。

(6) 結び目の空間の有限次元版として、折れ線結び目が考えられる。辺の長さが全て等しく、隣り合う辺のなす角も全て等しいようなものは、環状有機化合物の数学的モデルと言える。角の条件がないものは既に研究されているが、角の条件がつくと、文献にないようである。辺の数と角を固定して、このような折れ線結び目全体のなす配置空間を、辺の数が6以下の場合について求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

英語の論文では、旧姓の O' Hara (大原) を使用。

- ① J. O' Hara, The configuration space of equilateral and equiangular hexagons, to appear in Osaka J. Math. 査読有
- ② J. O' Hara, Isoperimetric characterization of the incenter of a triangle, to appear in Elemente der Mathematik. 査読有
- ③ J. O' Hara, Renormalization of potentials and generalized centers, Adv. Appl. Math. 48 (2012), 365-392. 査読有
- ④ J. O' Hara, Ideal, best packing, and energy minimizing double helices, Progress of Theoretical Physics Supplement 191 (2011) 215-224. 査読有
- ⑤ Udo Hertrich-Jeromin, Alastair King, and Jun O' Hara, On the Moebius geometry of Euclidean triangles, to appear in Elemente der Mathematik.

- ⑥ Remi Langevin and Jun O'Hara, Conformal invariance of the writhe of a knot, J. Knot Theory Ramifications 19 (2010) 1115-1123. 査読有
- ⑦ Remi Langevin and Jun O'Hara, Conformal arc-length as 1/2 dimensional length of the set of osculating circles, to appear in Comm. Math. Helv. 85 (2010) 273-312. 査読有

[学会発表] (計8件)

- ① J. O'Hara, Möbius invariant energies and average linking with circle、ESF-EMS-CRM-Pi International Conference on Knots and Links: From Form to Function, Centro di Ricerca Matematica (CRM), Scuola Normale Superiore, 2011年7月4日, ピサ (イタリア)
- ② J. O'Hara, Renormalization of r^* -potentials and generalized centers, Differential Geometry and Parametrization of 3D Knots, Centro di Ricerca Matematica (CRM), 2011年6月28日, ピサ (イタリア)
- ③ 今井 淳、 r^* -ポテンシャルの繰り込みと dual volume, 重心の一般化, 2011年3月20日, 日本数学会年会、早稲田大学
- ④ 今井 淳、平面領域のMöbius 不変なエネルギー、結び目と円の平均二乗絡み数, 2011年3月20日, 日本数学会年会、早稲田大学
- ⑤ J. O'Hara, Slopes of double helices and geometric energies, Statistical physics and topology of polymers with ramifications to structure and function of DNA and proteins, 2010年8月3日, 京都大学 基礎物理学研究所
- ⑥ J. O'Hara, Energy of knots and related topics, 第2回KOOK-TAPU合同Seminar, 第4回大学院学生ワークショップ (同時開催), 2010年7月28日, 慶北国立大学、韓国・大邱
- ⑦ J. O'Hara, Introduction to Knot Theory (with Javier Arsuaga), DNA Topology Course 2009, Okinawa Institute of Science and Technology, 2009年11月3日, 沖縄
- ⑧ J. O'Hara, Conformally invariant energies of knots and links, Advanced School and Conference on Knot Theory and its Applications to Physics and Biology, 2009年5月26日, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

[図書] (計0件)

[産業財産権]
○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等
<http://www.comp.tmu.ac.jp/knotNRG/indices/indexj.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今井 淳 (IMAI JUN)
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 70221132

(2) 研究分担者

神島 芳宣 (KAMISHIMA YOSHINOBU)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10125304

ゲスト マーティン (GUEST MARTIN)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 10295470

相馬 輝彦 (SOMA TERUHIKO)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 50154688

赤穂 まなぶ (AKAHO MANABU)
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号: 30332935

(3) 連携研究者
()

研究者番号：

(4) (海外) 研究協力者

ランジュヴァン レミ (LANGEVIN REMI)
ブルゴーニュ大学・ブルゴーニュ数学研究
所・教授

ソラネス ジル (SOLANES GIL)
バルセロナ大学・講師