

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 13 日現在

機関番号：32660  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2009 年度 ～ 2012 年度  
 課題番号：21540095  
 研究課題名（和文） 対称空間内の部分多様体の無限次元幾何および複素化を利用した研究  
 研究課題名（英文） Research of submanifolds in symmetric spaces by using the infinite dimensional geometry and the complexification  
 研究代表者  
 小池 直之 (Koike Naoyuki)  
 東京理科大学・理学部第一部数学科・准教授  
 研究者番号：00281410

研究成果の概要（和文）：主な研究成果は、次の通りです。

- (1) 非コンパクト型対称空間とよばれる(有限次元の)負曲率空間内の複素等焦部分多様体とよばれる図形が、ある条件下で、ある種のリー群作用の主軌道になることを示した。その証明において、その部分多様体の複素化の無限次元線形空間へのリフトを利用した。
- (2) コンパクト型対称空間とよばれる(有限次元の)正曲率空間内の極小でない等焦部分多様体と呼ばれる図形を平均曲率流とよばれる流れに沿って変形していくと、やがて、その焦部分多様体とよばれるより次元の低い図形に崩壊することを示した。その証明において、その部分多様体の無限次元線形空間へのリフトを利用した。
- (3) ある種のリー群作用をもつ無限次元の平坦(つまり、曲率 0)な空間内の、その作用により不変な超曲面(図形)を平均曲率流に沿って変形していくときに、ある種の強凸性とよばれる性質が保存されることを示した。
- (4) 非コンパクト型対称空間上のいくつかの条件下で、超極的とよばれるリー群作用を分類した。

研究成果の概要（英文）：Main results of this research are as follows.

- (1) We showed that complex equifocal submanifolds in a symmetric space of non-compact type are congruent to principal orbits of Lie group actions called “Hermann action” under certain conditions.
- (2) We showed that non-minimal equifocal submanifolds in a symmetric space of compact type collapse to their focal submanifolds along the mean curvature flow.
- (3) We investigated the regularized mean curvature flow for invariant hypersurfaces in a Hilbert space equipped with a Hilbert Lie group free action and proved a certain kind of strongly convex preservability theorem for the flow.
- (4) We classified hyperpolar actions on symmetric spaces of non-compact type under some conditions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
平成 21 年度	900,000	270,000	1,170,000
平成 22 年度	800,000	240,000	1,040,000
平成 23 年度	600,000	180,000	780,000
平成 24 年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード：部分多様体幾何，リー群作用，平均曲率流，対称空間，無限次元幾何，複素化

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 2002年、U. Christにより、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体(これは、球面内の等径超曲面の一般概念)が、ある条件下で、等質になることが示され、その結果、その部分多様体がHermann作用とよばれるリー群作用の主軌道になることが示されました。

この研究に触発され、非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体(これは、双曲空間内の等径超曲面の一般概念)に対し、類似した結果を得ることを本研究の主な目的の1つとしました。

(2) 2009年、X. LiuとC.L. Terngは、ユークリッド空間および球面内の等径部分多様体が平均曲率流に沿って有限時間でそのフォーカル部分多様体に崩壊することを示しました。この研究に触発され、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体に対し、類似した結果を得ることを本研究のもう1つの主な目的としました。

### 2. 研究の目的

(1) 2002年、U. Christにより、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体(これは、球面内の等径超曲面の一般概念)が、ある条件下で、等質になることが示され、その結果、その部分多様体がHermann作用とよばれるリー群作用の主軌道になることが示されました。

この研究に触発され、非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体(これは、双曲空間内の等径超曲面の一般概念)に対し、類似した結果を得ることを本研究の主な目的の1つとしました。

(2) 2009年、X. LiuとC.L. Terngは、ユークリッド空間および球面内の等径部分多様体が平均曲率流に沿って有限時間でそのフォーカル部分多様体に崩壊することを示しました。この研究に触発され、コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体に対し、類似した結果を得ることを本研究のもう1つの主な目的としました。

### 3. 研究の方法

上述の(1)の研究方法は、次の通りです。複素等焦部分多様体の等質性を、その複素化をある沈め込みを通じて無限次元アンチケーラー空間とよばれる線形空間へリフトしたものを調査することにより示し、さらに、その等質性を利用して、その部分多様体がHermann作用の主軌道になることを示すという方法です。

上述の(2)の研究方法は、次の通りです。

等焦部分多様体をある沈め込みを通じて無限次元ヒルベルト空間へリフトしたものを初期データにもつ平均曲率流を調査することにより示すという方法です。

### 4. 研究成果

研究期間内に行われた主な研究成果は、以下の通りです。

(1) 非コンパクト型対称空間内の複素等焦部分多様体が、ある条件下で、等質になること、さらに、Hermann型作用の主軌道になることを示した。

(2) コンパクト型対称空間内の等焦部分多様体が平均曲率流に沿って有限時間でそのフォーカル部分多様体に崩壊することを示した。

(3) 非コンパクト型対称空間上の超極的とよばれるリー群作用をいくつかの条件下で、分類した。

その他、研究期間中に浮上した研究で、成果をあげたものは、以下の通りです。

(4) 無限次元ヒルベルトリー群のある種の余等質有限の自由な等長作用をもつ無限次元ヒルベルト空間内の、その作用により不変な超曲面を初期データにもつ平均曲率流の研究を創始し、その平均曲率流に沿う様々な幾何学量の満たす発展方程式を得た上、その平均曲率流に沿うある種の強凸性保存性定理の証明をほぼ完成させた。

はめ込みの発展としての平均曲率流の研究は、3次元ポアンカレ予想の解決に用いられたリッチ流の研究と密接な関係があり、興味深い研究対象である。この研究は、著名な幾何学者達によって盛んに研究されていますが、2008年度まで、国内では、この研究は行われていませんでした。今後、本研究に端を発し、国内でも、この研究が盛んに行われることが期待される。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① 田丸博士, Jurgen Berndt, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, Journal fur Reine und Angewandte Mathematik 査読有, 掲載決定済,

② 小池直之 Collapse of the mean curvature flow for equifocal submanifolds, Asian Journal of Mathematics, 査読有,

Vol.15, No.1, 2011, pp.101–128

- ③ 田丸博士, Parabolic subgroups of semi-simple Lie groups and Einstein solv-manifolds, *Mathematische Annalen*, 査読有, Vol.351, No.1, 2011, 51-66
- ④ 小池直之 Hermann type actions on a pseudo-Riemannian symmetric space, *Tsukuba Journal of Mathematics*, 査読有, Vol.34, No.2, 2010, pp. 137–172
- ⑤ 小池直之 On curvature-adapted and Proper complex equifocal submanifolds, *Kyungpook Mathematical Journal*, 査読有, Vol.50, No.4, 2010, pp.509–536
- ⑥ 小池直之 Examples of a complex hyperpolar action without singular orbit, *Cubo A Mathematical Journal*, 査読有, Vol.12, No.2, 2010, pp.131–147
- ⑦ 小池直之 The homogeneous slice theorem for the complete complexification of a proper complex equifocal submanifold, *Tokyo Journal of Mathematics*, 査読有, Vol.33, No.1, 2010, pp.1–30,
- ⑧ 田丸博士, Jürgen Berndt, José Carlos Díaz-Ramos, Hyperpolar homogeneous foliations on symmetric spaces of noncompact type, *Journal of Differential Geometry*, 査読有, Vol.86, No.2, 2010, 191-235

[学会発表] (計 22 件)

- ① 小池直之 Certain kind of isoparametric submanifolds in symmetric spaces of non-compact type and Hermann actions, The 6<sup>th</sup> OCAMI-KNUGRG Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Theory in Symmetric spaces and Lie theory in Finite and Infinite Dimensions (招待講演), 2013 年 2 月 2 日, 大阪市立大学
- ② 田丸博士 On the moduli space of left-invariant metrics on a Lie group, The 6<sup>th</sup> OCAMI-KNUGRG Joint Differential Geometry Workshop on Submanifold Theory in Symmetric spaces and Lie theory in Finite and Infinite Dimensions (招待講演), 2013 年 2 月 2 日, 大阪市立大学
- ③ 小池直之 対称空間内の等径部分多様体を発する平均曲率流, 広島幾何学研究集会 2012 (招待講演), 2012 年 10 月 4 日, 広島大学
- ④ 小池直之 非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体の分類, 部分多様体の幾何とリー群作用 2012 (招待講

演), 2012 年 9 月 4 日, 東京理科大学

- ⑤ 田丸博士 非コンパクト対称空間への群作用とその応用, 第 59 回幾何学シンポジウム(招待講演), 2012 年 8 月 27 日, 九州大学
- ⑥ 小池直之 非コンパクト型対称空間内のある種の等径部分多様体の分類, 部分多様体の微分幾何学及び関連課題—前田定廣先生還暦記念研究集会, 2012 年 8 月 4 日, 佐賀大学
- ⑦ 田丸博士 複素双曲空間内の等質部分多様体に関するいくつかの話題, 部分多様体の微分幾何学及び関連課題—前田定廣先生還暦記念研究集会(招待講演), 2012 年 8 月 4 日, 佐賀大学
- ⑧ 小池直之 対称空間における非等方的エネルギー汎関数および非等方的等径超曲面, 日本数学会 2012 年度会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学
- ⑨ 小池直之 ヒルベルト空間内のある種の不変超曲面を発する平均曲率流について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 2011 年 9 月 30 日, 信州大学
- ⑩ 田丸博士 Parabolic subgroups of semi-simple Lie groups and submanifold geometry, DFG-JSPS Seminar 「Lie groups: Geometry and Analysis」, 2011 年 9 月 9 日, Paderborn (ドイツ)
- ⑪ 田丸博士 Parabolic subgroups and geometry of solvable Lie groups, 10<sup>th</sup> Panhellenic Geometry Conference, 2011 年 5 月 27-29 日, Patras (ギリシャ)
- ⑫ 田丸博士 Parabolic subgroups and submanifold geometry of noncompact symmetric spaces, International Mini-Workshop on Geometry of Symmetric Spaces and Related Fields (招待講演), 2011 年 4 月 14 日, Kyungpook National University (韓国)
- ⑬ 小池直之 Homogeneity of an equifocal submanifold and a proper complex equifocal submanifold I, II, The 14<sup>th</sup> International Workshop on Differential Geometry and The 3<sup>rd</sup> KNUGRG-OCAMI Differential Geometry Workshop (招待講演), 2010 年 11 月 4, 5 日, Kyungpook National University (韓国)
- ⑭ 田丸博士 非コンパクト対称空間への良い作用の構成法, 部分多様体幾何とリー群作用(招待講演), 2010 年 9 月 8 日, 東京理科大学
- ⑮ 小池直之 On equifocal submanifolds and complex equifocal submanifolds, Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems (招待講演), 2010 年 8 月 27 日, 東北大学
- ⑯ 田丸博士 Cohomogeneity one actions on

symmetric spaces of noncompact type (II), Workshop on Hypersurfaces Geometry and Integrable Systems (招待講演), 2010年8月26日, 東北大学

- ⑰ 小池直之 プロパー複素等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流, 日本数学会 2010 年度会, 2010 年 3 月 24 日, 慶応大学
- ⑱ 小池直之 Collapse of the mean curvature flows of equifocal submanifolds and proper complex equifocal submanifolds (招待講演), The 2<sup>nd</sup> TIMS-OCAMI Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2010年3月21日, National Taiwan University(台湾)
- ⑲ 田丸博士 Homogeneous submanifolds in noncompact symmetric spaces(全6回), International Mini Workshop on Integral Geometry and Symmetric Spaces (招待講演), 2010年2月22-24日, Kyungpook National University (韓国)
- ⑳ 小池直之 The mean curvature flow for equifocal submanifolds, The 1st KNUGRG-OCAMI Differential Geometry Workshop (招待講演), 2009年10月29日, 大阪市立大学
- 21 小池直之 等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流, 2010年度秋季総合分科会(招待講演), 2009年9月24日, 大阪大学
- 22 小池直之 等焦部分多様体を初期データにもつ平均曲率流, RIMS 研究集会「部分多様体論とその周辺領域における新たな研究対象」(招待講演), 2009年6月23日, 京都大学数理解析研究所

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

下記のホームページに研究成果の一部を公開している。

[www.rs.kagu.tus.ac.jp/~koike/](http://www.rs.kagu.tus.ac.jp/~koike/)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小池 直之 (NAOYUKI KOIKE)

東京理科大学・理学部第一部数学科・  
准教授

研究者番号 : 00281410

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

田丸 博士 (HIROSHI TAMARU)

広島大学・大学院理学研究科数学専攻・  
准教授

研究者番号 : 50306982